

文章编号:1001-9081(2014)03-0828-05

doi:10.11772/j.issn.1001-9081.2014.03.0828

融合 KL 散度和移地距离的高斯混合模型相似性度量方法

余 艳^{1,2*}

(1. 武汉科技大学 理学院, 武汉 430065; 2. 华中科技大学 计算机科学与技术学院, 武汉 430074)

(*通信作者电子邮箱 yuyan_wust@163.com)

摘要:为提高高斯混合模型(GMM)间相似性度量方法的计算效率和准确性,通过对称化KL散度(KLD)并结合移地距离(EMD)提出一种新的相似性度量方法。首先计算待比较的两个高斯混合模型内各高斯成分间的KL散度,对称化处理后用于构造地面距离矩阵;然后用线性规划方法求解两个高斯混合模型间的移地距离作为高斯混合模型间的相似性度量。实验结果表明,将该相似性度量方法应用于彩色图像检索,相对于传统方法能够提高检索的时间效率和准确性。

关键词:图像检索;高斯混合模型;KL散度;移地距离;颜色空间分布

中图分类号: TP391.413 **文献标志码:**A

Similarity measure method of Gaussian mixture model by integrating Kullback-Leibler divergence and earth mover's distance

YU Yan^{1,2*}

(1. School of Science, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan Hubei 430065, China;

2. School of Computer Science and Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan Hubei 430074, China)

Abstract: To improve the computation efficiency and effectiveness of the similarity measure method between two Gaussian Mixture Models (GMM), a new measure method was proposed by means of integrating symmetrized Kullback-Leibler Divergence (KLD) and earth mover's distance. At first, the KL divergence between Gaussian components of the two GMMs to be compared was computed and symmetrized for constructing the earth distance matrix. Then, the earth mover's distance between the two GMMs was computed using linear programming and it was used for GMM similarity measure. The new measure method was tested in colorful image retrieval. The experimental results show that the proposed method is more effective and efficient than the traditional measure methods.

Key words: image retrieval; Gaussian Mixture Model (GMM); Kullback-Leibler Divergence (KLD); Earth Mover's Distance (EMD); color spatial distribution

0 引言

随着网络和计算机技术的发展,多媒体信息日益膨胀,基于人工标注的多媒体信息管理方法逐渐不能满足人们的需求,基于内容的多媒体信息检索则成为研究热点。在基于内容的多媒体信息检索系统中,两个关键工作是多媒体信息的特征表达和特征间的相似性度量^[1]。高斯混合模型(Gaussian Mixture Model, GMM)是常用的多媒体信息表达方法,文献[1–5]使用GMM表达图像特征实现图像分类和图像检索;文献[6–8]使用GMM表达音频特征实现声音检索和音乐标注。

在使用GMM表达多媒体信息时,常用的相似性度量方法为KL散度(Kullback-Leibler Divergence, KLD)^[9–10]。使用KLD度量GMM间的相似性,由于没有闭合形式的求解表达式通常使用蒙特卡罗模拟法求解KLD,但蒙特卡罗模拟算法需要大量采样,因此该方法时间效率较低。为解决GMM间KLD计算的时间效率问题,文献[1]提出了两种KLD的近似求解方法:基于匹配的KLD近似算法和基于无迹变换的KLD

近似算法。虽然这两种算法能够有效提高KLD计算的时间效率,但准确性相对蒙特卡罗计算法却有所下降。

在基于内容的多媒体检索领域,常使用移地距离(Earth Mover's Distance, EMD)度量多媒体间的相似性。文献[11]使用EMD进行图像检索;文献[12]使用EMD进行视频检索。首先提取图像或视频的特征向量集(如颜色、声音或运动特征);再通过聚类算法将图像或视频表达为带权聚类集合,形如 $\{(c_1, \omega_1), (c_2, \omega_2), \dots, (c_m, \omega_m)\}$,其中: c_i 表示第*i*个聚类的中心, ω_i 表示第*i*个聚类的权值,*m*表示聚类的个数;最后使用EMD计算带权聚类集合间的距离。若使用EMD度量GMM间的相似性,可将GMM看作带权聚类集合,聚类中心为GMM中各高斯成分的均值向量,聚类的权值为对应高斯成分的权值,通过计算带权聚类集合间的移地距离度量GMM间的相似性。但这样做只考虑了GMM包含的各高斯成分的均值特征及其所占权重,却忽视了高斯成分的协方差矩阵特征。

基于以上问题的启发,本文融合KLD和EMD两种度量方法,提出一种新的高斯混合模型间相似性度量方法——

收稿日期:2013-11-04;修回日期:2013-12-02。

基金项目:冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室(武汉科技大学)开放基金资助项目(Y201101)。

作者简介:余艳(1980-),女,湖北襄樊人,讲师,博士研究生,CCF会员,主要研究方向:计算机视觉、机器学习。

sKLDEM (Gaussian mixture model similarity measure method based on symmetrized Kullback-Leibler Divergence and Earth Mover's Distance),并将该方法应用于彩色图像的检索。该方法一方面通过 KLD 的计算充分利用 GMM 内部各高斯成分的均值和协方差特征;另一方面通过 EMD 算法分析 GMM 的整体形状特征,从而获取更准确的相似性度量结果。

1 图像的 GMM 建模

图像检索的核心工作之一是将原始图像包含的高维数据信息转化为有效的低维信息。对图像进行 GMM 建模,就是使用 GMM 表达图像的颜色、纹理等信息。本文主要处理彩色图像的颜色及空间分布信息,因此 GMM 的每个高斯成分对应图像中具有相似颜色的连续区域。对图像进行 GMM 建模包含两个步骤:1) 提取图像的底层特征;2) 提取图像的 GMM。

1.1 提取图像底层特征

为表达图像的颜色信息以及颜色在图像中的空间分布,图像中每个像素点的特征向量不仅包含对应像素点的颜色信息(R, G, B),还包含像素点在图像中的位置信息(h, v),其中: h 为像素点在图像中的横坐标, v 为像素点在图像中的纵坐标,因此每个像素点由一个 5 维向量(R, G, B, h, v)^T表示,并对其进行归一化处理。假设图像共 N 个像素点,则该图像所有像素点的特征向量构成该图像的底层特征向量集 X ,形式为一个 $N \times 5$ 的矩阵。

1.2 提取图像 GMM

1.2.1 GMM 表达形式

对任何一幅图像,其底层特征向量集 X 可以看作由该图像对应的 GMM 生成的数据。假设图像对应的 GMM 包含 m 个高斯成分,则该 GMM 的概率密度函数由这 m 个高斯分布线性相加而得,其概率密度函数如式(1) 所示:

$$f(\mathbf{x} | \Theta) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(\mathbf{x} | \theta_i) \quad (1)$$

其中: \mathbf{x} 为特征向量; Θ 为 GMM 的参数集合($\alpha_1, \dots, \alpha_m, \theta_1, \dots, \theta_m$), α_i 为第 i 个高斯成分的权重($0 \leq \alpha_i \leq 1$)且 $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$; f_i 为 GMM 的第 i 个高斯成分,它表示服从高斯分布的概率密度函数,如式(2) 所示:

$$f_i(\mathbf{x} | \theta_i) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma_i|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mu_i)^T \Sigma_i^{-1} (\mathbf{x} - \mu_i)} \quad (2)$$

其中: θ_i 为第 i 个高斯成分的参数集合(μ_i, Σ_i); μ_i 为 f_i 的均值向量; Σ_i 为 f_i 的协方差矩阵; d 为特征向量 \mathbf{x} 的维数,即 5。一幅图像对应的 GMM 最终表达为其概率密度函数的参数集合,如式(3) 所示:

$$\{(\mu_1, \Sigma_1, \alpha_1), (\mu_2, \Sigma_2, \alpha_2), \dots, (\mu_m, \Sigma_m, \alpha_m)\} \quad (3)$$

1.2.2 GMM 参数估计

提取图像 GMM 的核心问题是估计出该 GMM 的参数集合。由于底层特征向量集 X 可以看作由该图像对应的 GMM 生成的数据,在已知 GMM 概率密度函数形式的情况下,根据这些数据使用期望最大化(Expectation-Maximization, EM)算法^{[13]435-439}估计 GMM 的极大似然参数。EM 算法包括

以下 4 步:

1) 为减少算法迭代次数,使用 K 均值算法^{[13]424-428} 初始化均值向量 μ_i 、协方差矩阵 Σ_i 和权重系数 α_i ($i = 1, 2, \dots, m$),并计算当前的对数似然值,如式(4) 所示:

$$\ln p(X | \Theta) = \sum_{n=1}^N \ln \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x_n | \mu_i, \Sigma_i) \right\} \quad (4)$$

2) E 步。根据当前参数值计算特征向量 x_n 由第 i 个高斯成分产生的后验概率,如式(5) 所示:

$$r(z_{ni}) = \frac{\alpha_i f_i(x_n | \mu_i, \Sigma_i)}{\sum_{j=1}^m \alpha_j f_j(x_n | \mu_j, \Sigma_j)} \quad (5)$$

3) M 步。根据当前计算的后验概率 $r(z_{ni})$ 重新估计参数 μ_i, Σ_i 和 α_i ($i = 1, 2, \dots, m$),如式(6) ~ (8) 所示:

$$\mu_i^{\text{new}} = \frac{1}{\sum_{n=1}^N r(z_{ni})} \sum_{n=1}^N r(z_{ni}) x_n \quad (6)$$

$$\Sigma_i^{\text{new}} = \frac{1}{\sum_{n=1}^N r(z_{ni})} \sum_{n=1}^N r(z_{ni}) (x_n - \mu_i^{\text{new}})(x_n - \mu_i^{\text{new}})^T \quad (7)$$

$$\alpha_i^{\text{new}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N r(z_{ni}) \quad (8)$$

4) 重新计算对数似然值如式(4) 所示,如果对数似然值没有收敛,则返回第 2) 步。

用上述方法提取测试图像集中所有图像的 GMM,并存入数据库用于图像检索。

2 GMM 相似性度量

2.1 相关工作

KLD 又称作相对熵,用来度量两个概率分布 p 和 q 之间的差异,如式(9) 所示:

$$KLD(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln \frac{p(x)}{q(x)} dx \quad (9)$$

KLD 也常被称为 KL 距离,但它并不是真正的距离,因为它不满足距离的对称性和三角不等式。当待比较的两个统计模型服从高斯分布时,KLD 有闭式解^{[3]4} 如式(10) 所示:

$$KLD(p, q) = \frac{1}{2} \left[\ln \frac{|\Sigma_q|}{|\Sigma_p|} + \text{tr}(\Sigma_q^{-1} \Sigma_p) + (\mu_p - \mu_q)^T \Sigma_q^{-1} (\mu_p - \mu_q) - d \right] \quad (10)$$

但当待比较的两个统计模型为 GMM 时,KLD 没有闭式解,通常使用蒙特卡罗模拟法或近似算法^{[1]488-491}求解。

EMD 度量两个分布间的差异其思想源于将一个分布变形为另一个分布所花费的最小代价^{[11]100}。在使用 EMD 计算分布间的距离时,通常使用带权聚类的集合表示一个分布,并将两个分布分别看作散落在特征空间中的土堆集合和土坑集合,各土堆和土坑之间的距离为两个分布各聚类中心间的距离,而两个分布间的距离则可以看作移动土堆填充所有土坑花费的最小工作量^{[11]104}。

2.2 融合 KLD 和 EMD 的相似性度量方法

假设待比较的两幅图像对应的高斯混合模型分别为 P 和 Q 。其中: $P = \{(\mu_{p_1}, \Sigma_{p_1}, \alpha_1), \dots, (\mu_{p_m}, \Sigma_{p_m}, \alpha_m)\}$ 包含 m 个高

斯成分; μ_{p_i} 、 Σ_{p_i} 和 α_i 分别为 P 的第 i 个高斯成分的均值向量、协方差矩阵和权重; $Q = \{(\mu_{q_1}, \Sigma_{q_1}, \beta_1), \dots, (\mu_{q_m}, \Sigma_{q_m}, \beta_n)\}$ 包含 n 个高斯成分, μ_{q_j} 、 Σ_{q_j} 和 β_j 分别为 Q 的第 j 个高斯成分的均值向量、协方差矩阵和权重。计算 P 和 Q 之间的移地距离可以映射为货物运输问题, 将模型 P 的各高斯成分看作各供应商, 其权重看作持有货物的数量, 模型 Q 的各高斯成分看作各消费者, 其权重看作对货物的需求量, P 中第 i 个供应商和 Q 中第 j 个消费者之间的距离记作 d_{ij} , 由于 P_i 和 Q_j 都服从高斯分布, 故可使用 KLD 计算 P_i 和 Q_j 间的 KL 散度, 如式(11)所示:

$$KLD(P_i, Q_j) = \frac{1}{2} \left[\ln \frac{|\Sigma_{q_j}|}{|\Sigma_{p_i}|} + \text{tr}(\Sigma_{q_j}^{-1} \Sigma_{p_i}) + (\mu_{p_i} - \mu_{q_j})^\top \Sigma_{q_j}^{-1} (\mu_{p_i} - \mu_{q_j}) - d \right] \quad (11)$$

由于 KLD 不满足距离的对称性, 本文对其作对称化处理, 得到 P_i 和 Q_j 间的地面距离, 如式(12)所示:

$$d_{ij} = \frac{KLD(P_i, Q_j) + KLD(Q_j, P_i)}{2} \quad (12)$$

构造 P 和 Q 间地面距离矩阵 D , 如式(13)所示:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mn} \end{bmatrix}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \quad (13)$$

高斯混合模型 P 和 Q 之间的距离如式(14)所示, 计算所得 $sKLDEM(D, P, Q)$ 值越大, 说明高斯混合模型 P 和 Q 间的距离越远, 其相似性越小; 反之该值越小, P 和 Q 间的相似性越大。

$$sKLDEM(P, Q) = \arg \min_F \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d_{ij} f_{ij} \quad (14)$$

约束条件为:

$$f_{ij} \geq 0; \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \quad (15)$$

$$\sum_{j=1}^m f_{ij} \leq \alpha_i; \quad 1 \leq i \leq m \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^n f_{ij} \leq \beta_j; \quad 1 \leq j \leq n \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f_{ij} = 1 \quad (18)$$

其中: f_{ij} 为从 P 的第 i 个供应商移动到 Q 的第 j 个消费者的货物量, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d_{ij} f_{ij}$ 表示把所有货物从供应商移到消费者的移动代价, 通过最小化移动代价得到分布 P 和 Q 间的移地距离。约束条件(15)限制移动方向只能从 P 到 Q 而不能从 Q 到 P ; 约束条件(16)限制从 P 的第 i 个供应商移出的货物不超出其供应量; 约束条件(17)限制 Q 中第 j 个消费者接收的货物不超出其需求量; 约束条件(18)强制移出 P 中所有的货物。该最小化问题可用线性规划方法求解。

3 实验结果

为验证本文提出的 GMM 相似性度量方法 $sKLDEM$ 的效果, 将其用于彩色图像检索问题, 以 GMM 作为图像的特征表达, 以 $sKLDEM$ 作为图像间的相似性度量。实验从

COREL 图像库中抽出 353 张图像作为测试图像集, 整个图像集分为 7 类, 包括马、花朵、海滩、汽车、建筑、印第安人和恐龙, 每类图像拥有相似的颜色空间分布。图像大小为 384×256 或者 256×384 , 图像格式为 jpg。为提高图像特征提取速度, 在预处理阶段将测试图像集中所有图像缩小至原始大小的 $1/5$, 在 GMM 建模阶段设定所有图像的高斯混合模型均包含 3 个高斯成分。实际应用中也可采用极小描述长度 (Minimum Description Length, MDL) 准则^[1488]确定各图像对应的 GMM 包含的高斯成分个数。

为比较 $sKLDEM$ 的性能, 将它与其他 3 种 GMM 相似性度量方法从检索精确率、召回率和距离计算时间三方面进行对比, 这 3 种度量方法分别是:

1) 使用蒙特卡洛采样法计算 GMM 间的 KL 散度, 采样粒子数为 1000, 简称为 KLD_{MC} (similarity measure based on Kullback-Leibler divergence and Monte Carlo Sampling);

2) 将 GMM 看作带权聚类集合, 使用聚类中心间的欧氏距离构造地面矩阵, 计算 GMM 间的移地距离, 简称为 EMD;

3) 融合 KLD 和 EMD 两种方法, 但构造地面矩阵时不对 KLD 作对称化处理, 简称为 KLDEM_D (similarity measure method based on Kullback-Leibler divergence not symmetrized and earth mover's distance)。

为客观评价本文算法的性能, 对比实验使用同样的数据和条件, 运行的软件环境是 Windows XP 下安装的 Matlab 7.0, 硬件环境是 Intel Core2 Duo 2.10 GHz 双核 CPU、1.99 GB 内存。

3.1 检索实例

图 1~2 给出 4 种相似性度量方法的检索实例, 图 1 以马类图像作为例子图像, 图 2 以花类图像作为例子图像。每种检索方法都显示与例子图像最相似的前 20 张图像, 检索结果按照相似度大小从左至右从上至下依次排列, 其中位于左上角的第一幅图像为例子图像兼检索结果。由图 1~2 可知 4 种方法都可以检索到同类图像, 由于例子图像与自己本身的距离最近, 所以在检索返回结果中例子图像总排在第一位。从检索实例观察得知, 本文所提 $sKLDEM$ 的检索结果中绝大部分都为同类图像, KLD_{MC} 和 EMD 两种方法检索效果居中。

3.2 性能评价

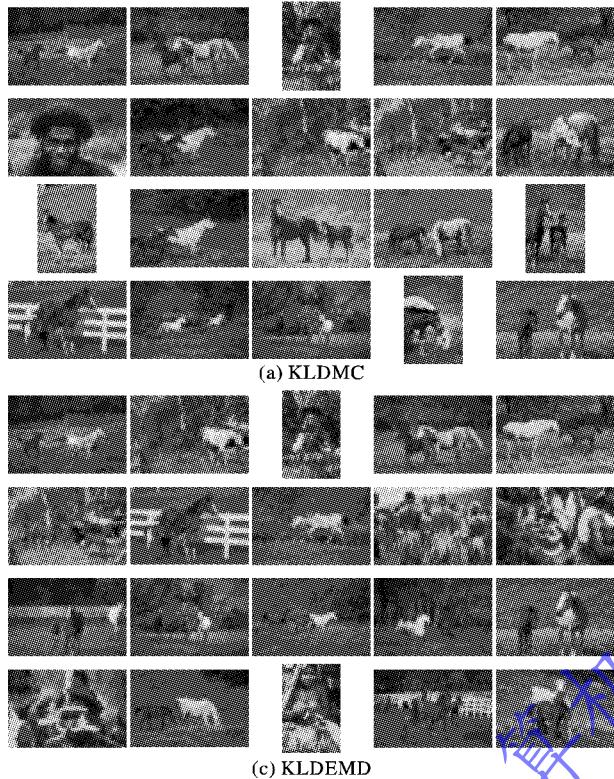
实验采用准确率和召回率作为算法检索效果的评价标准。其中: 准确率定义为检索结果中相关图像数与检索返回图像总数之比; 召回率定义为检索结果中相关图像数与图像集中相关图像总数之比; 相关图像指与例子图像同属一类的图像。实验从图像集中抽取每一幅图像作为例子图像进行检索, 按相似度大小排序返回前 100 幅检索图像, 取每次检索结果准确率和召回率的平均值作为算法的平均检索结果。

图 3 给出 4 种方法的检索准确率曲线, 横轴表示检索结果返回图片总数, 纵轴表示平均检索准确率。由图 3 可知, 随着返回图片总数的增加, 平均检索准确率会下降, 但本文提出的 $sKLDEM$ 的性能曲线位于最上方, 其平均检索准确率随返回图片总数的增加下降得最慢; KLD_{MC} 和 EMD 的性能曲线几乎重合, 它们位于中部; 而 $KLDEM_D$ 的性能曲线位于最

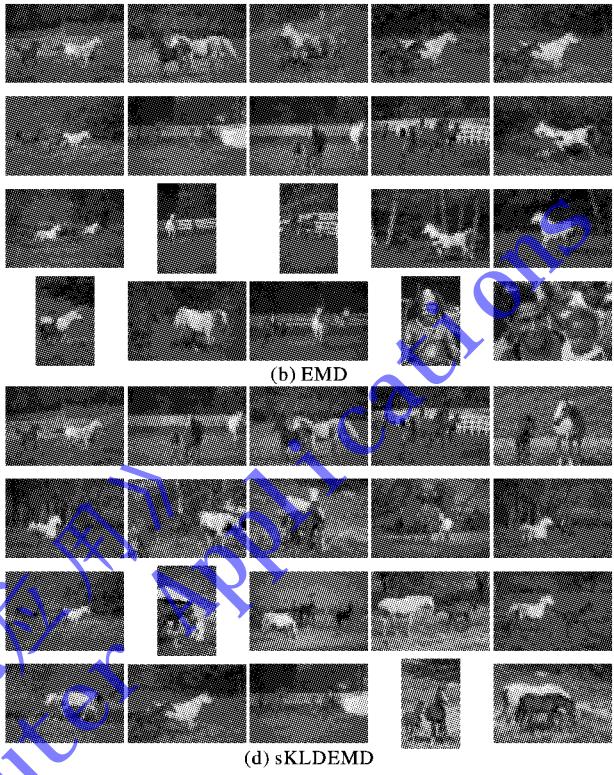
下方,下降速度最快。

图4给出4种方法的检索召回率曲线,横轴表示检索结果返回图片总数,纵轴表示平均检索召回率。由图3可知,随着返回图像总数的增加,平均检索召回率会上升,本文提出的

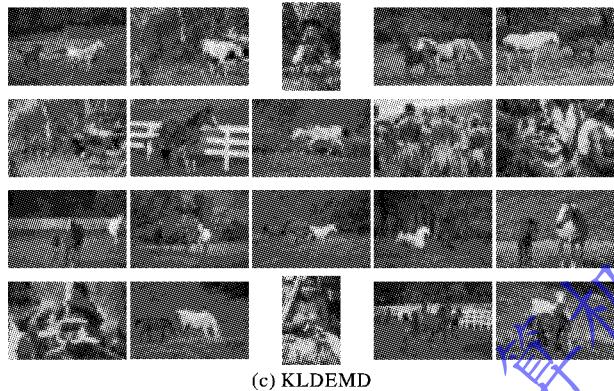
sKLDEMD的性能曲线位于最上方,平均检索召回率随着返回图像总数的增加升得最快;KLDMD和EMD的性能曲线几乎重合,它们位于中部;而KLDEM的性能曲线位于最下方,上升速度最慢。



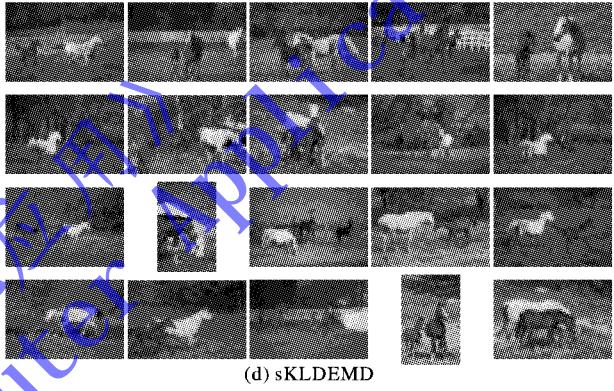
(a) KLDMD



(b) EMD



(c) KLDEM

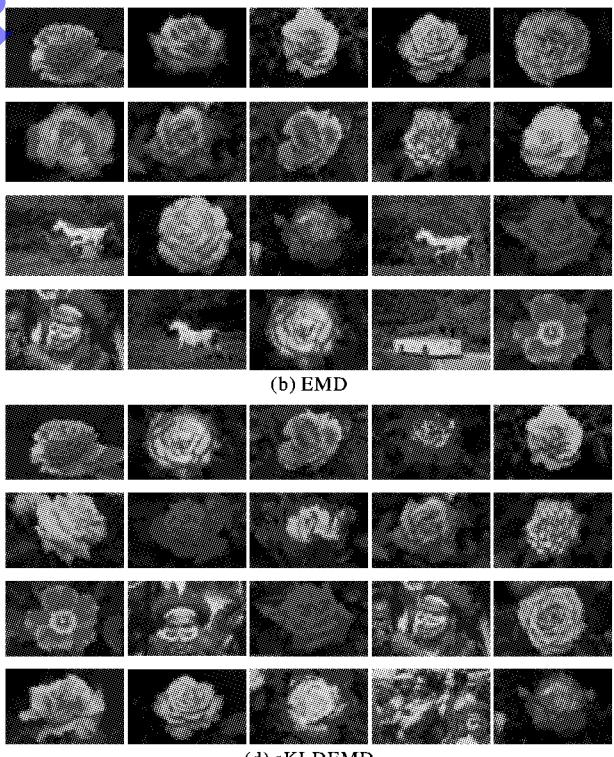


(d) sKLDEM

图1 马类图像检索实例



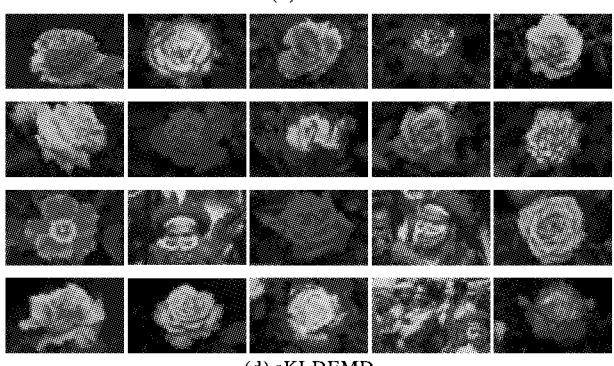
(a) KLDMD



(b) EMD



(c) KLDEM



(d) sKLDEM

图2 花类图像检索实例

由图3~4可知KLDEM的平均检索性能最差,这与图1~2所得结论相同,其原因是因为KL散度并不是真正的

距离,它不具备距离的对称性,其非对称性不适合用在EMD的计算框架中。因此在融合KLD和EMD两种方法时,当构

造地面距离矩阵,需要对两个高斯模型间的 KL 距离作对称化处理,由此得到的 sKLDEMD 在 4 种方法中可获得最优的平均检索性能。

在图像检索的性能测试实验中,记录下每一次检索过程中所有图像对间距离的计算时间,并取其均值来比较各种相似性度量方法的计算速度。表 1 给出了 4 种方法的平均计算时间,从表中可以看出本文提出的 sKLDEMD 相对于传统的相似性度量方法 KLDMD 的计算时间更少。

表 1 4 种方法的平均计算时间

相似性度量方法	平均计算时间	相似性度量方法	平均计算时间
KLDMD	0.0086	KLDEMD	0.0061
EMD	0.0059	sKLDEMD	0.0064

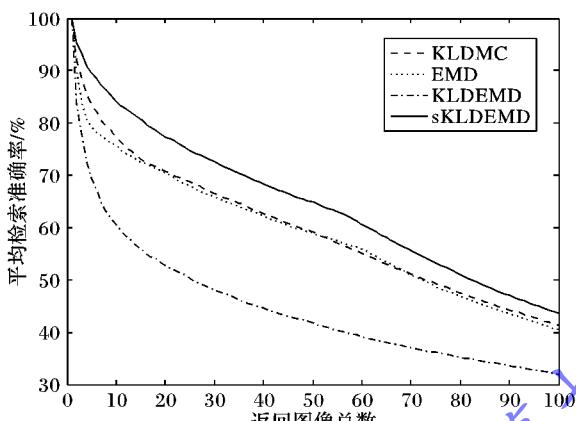


图 3 检索准确率曲线

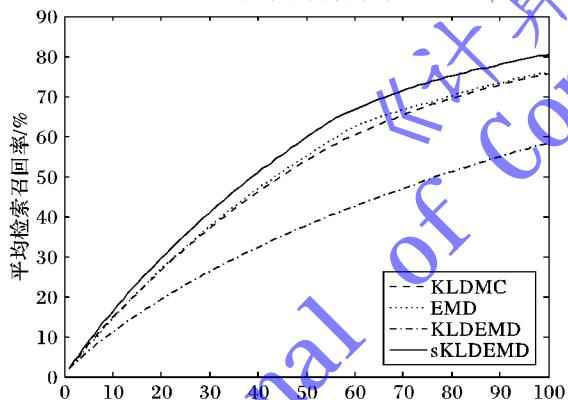


图 4 检索召回率曲线

4 结语

本文提出一种融合 KL 散度和移地距离的高斯混合模型相似性度量方法。该方法在 GMM 距离计算的过程中既考虑了 GMM 内部各成分的均值特征,也考虑了各成分的协方差特征;通过对 KL 散度的对称化处理,构建了地面距离矩阵,使其可以应用于移地距离的计算;最后利用移地距离处理了 GMM 的整体分布特征,实现了 GMM 整体与局部特征的融合。实验将该度量方法应用于彩色图像检索,实验结果证明本文方法取得了理想的检索效果,在检索效率和准确性上优于传统的高斯混合模型相似性度量方法。

从检索实例来看,检索返回前 20 张图像时,检索结果中就已出现一些不相关图像,这是因为检索只利用了图像的颜

色空间分布特征。进一步考虑图像的其他特征,采用更合理的特征表达方法和相似性度量方法,实现更有效的图像检索仍需要做进一步的研究。

参考文献:

- [1] GOLDBERGER J, GORDON S, GREENSPAN H. An efficient image similarity measure based on approximations of KL-divergence between two Gaussian mixture [C]// Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Computer Vision. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2003: 487 – 493.
- [2] CARSON C, BELONGIE S, GREENSPAN H, et al. Blobworld: image segmentation using expectation-maximization and its application to image querying [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2002, 24(8): 1026 – 1038.
- [3] LIU Y, PERRONNIN F. A similarity measure between unordered vector sets with application to image categorization [C]// Proceedings of the 26th IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2008: 1 – 8.
- [4] LUSZCZKIEWICZ-PIATEK M, SMOLKA B. Effective color image retrieval based on the Gaussian mixture model [C]// Proceedings of the 3rd International Workshop on Computational Color Imaging. Berlin: Springer, 2011: 199 – 213.
- [5] GREENSPAN H. Medical image categorization and retrieval for PACS using the GMM-KL framework [J]. IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine, 2007, 11(2): 190 – 202.
- [6] HELEN M, VIRTANEN T. Query by example of audio signals using Euclidean distance between Gaussian mixture models [C]// Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2007: 1225 – 1228.
- [7] TURNBULL D, BARRINGTON L, TORRES D, et al. Semantic annotation and retrieval of music and sound effects [J]. IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing, 2008, 16(2): 467 – 476.
- [8] WANG J, YANG Y, WANG H, et al. The acoustic emotion Gaussians model for emotion-based music annotation and retrieval [C]// Proceedings of the 20th ACM International Conference on Multimedia. New York: ACM Press, 2012: 89 – 98.
- [9] VASCONCELOS N. On the efficient evaluation of probabilistic similarity functions for image retrieval [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2004, 50(7): 1482 – 1496.
- [10] VASCONCELOS N, HO P, MORENO P. The Kullback-Leibler kernel as a framework for discriminant and localized representations for visual recognition [C]// ECCV 2004: Proceedings of the 8th European Conference on Computer Vision, LNCS 3023. Berlin: Springer, 2004: 430 – 441.
- [11] RUBNER Y, TOMASI C, GUIBAS L J. The earth mover's distance as a metric for image retrieval [J]. International Journal of Computer Vision, 2000, 40(2): 99 – 121.
- [12] TAKADA K, YANAI K. Web video retrieval based on the earth mover's distance by integrating color, motion and sound [C]// Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2008: 89 – 92.
- [13] BISHOP C M. Pattern recognition and machine learning [M]. Berlin: Springer, 2006.