

## 面向有限元网格生成的单元尺寸场光滑化算法

曾丽娟<sup>1\*</sup>, 李绍磊<sup>1</sup>, 朱朝艳<sup>1,2</sup>

(1. 浙江大学 工程与科学计算研究中心, 杭州 310027; 2. 浙江大学宁波理工学院 信息科学与工程学院, 浙江 宁波 315100)

(\*通信作者电子邮箱 zengljuan@zju.edu.cn)

**摘要:**针对单元尺寸场的合适与否会直接影响到后续有限元网格质量的问题,提出一种尺寸修正算法来优化单元尺寸场。在 Borouchaki 等提出的 H 变化量 (BOROUCHAKI H, HECHT F, FREY P J. Mesh gradation control. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1998, 43(6): 1143 - 1165) 的基础上,引入尺寸梯度概念,进行一系列公式推导,得到二维的单元尺寸场的合理过渡要求,从而以定义在非结构背景网格的单元尺寸场为例,改进 Borouchaki 修正算法,提出了一种最少量地重置尺寸场中节点单元尺寸值,最大化地全局光滑单元尺寸场的新算法。最后给出若干实例的网格生成效果图,证明算法能帮助工程应用的模型生成更高质量的网格,跟其他修正算法相比,网格尺寸过渡明显更均匀。

**关键词:** 网格生成; 有限元; 非结构网格; 单元尺寸场; 光滑化; 背景网格

**中图分类号:** TP391.4 **文献标志码:** A

### Element-sizing field smoothing algorithm for mesh generation of finite element analysis

ZENG Lijuan<sup>1\*</sup>, LI Shaolei<sup>1</sup>, ZHU Chaoyan<sup>1,2</sup>

(1. Center for Engineering and Scientific Computation, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China;  
2. School of Information Science and Engineering, Ningbo Institute of Technology, Zhejiang University, Ningbo Zhejiang 315100, China)

**Abstract:** Element-sizing fields are necessities for guiding the generation of high-quality meshes used in finite element analyses and smoothness of this field heavily affect the element quality of the resulting mesh. A new algorithm was proposed to smooth the element-sizing fields. Based on the H-variant proposed by Borouchaki, *et al.* (BOROUCHAKI H, HECHT F, FREY P J. Mesh gradation control. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1998, 43(6): 1143 - 1165), some basic geometric concepts and a theory that aimed at analyzing the smoothness of 2D element-sizing fields quantitatively was established in this paper. The rule of the reasonable sizing transition for 2D area was achieved. Based on this rule, an improved algorithm from Borouchaki sizing-correcting method defined on unstructured background meshes was designed. This algorithm adjusted the size values attached on a small set of background mesh nodes to ensure the output of a well graded size field. Finally, mesh examples were given to validate the proposed theory and algorithm. Compared with other smoothing methods, the proposed algorithm in this paper can help get meshes with better quality.

**Key words:** mesh generation; finite element; unstructured mesh; element-sizing field; smoothing; background mesh

## 0 引言

网格生成是有限元分析的前置处理步骤,也是主要性能瓶颈<sup>[1]</sup>。好的有限元网格需同时追求 2 个目标:尽量少的自由度和尽量高的模型精度。为平衡这两个目标,需要对单元尺寸进行复杂的控制。单元尺寸控制的第 1 步是建立初始单元尺寸场,它需要依赖用户经验、输入模型等先验知识,或是前次计算得到的误差分布等后验知识<sup>[2]</sup>。单元尺寸场的过渡是否合理对最终生成单元的形状有很重要的影响<sup>[3-4]</sup>,若疏密过渡过于剧烈,则区域内部会产生形状很差的单元。单元尺寸控制的第 2 步则是局部调整初始单元尺寸场的定义,使其满足合理过渡的内在要求,这一步也常被称为单元尺寸场的光滑化。

为光滑化单元尺寸场, Borouchaki 等<sup>[4]</sup>提出了一维上的

单元尺寸场的合理过渡要求,通过调整背景网格边上的 H 变化量(H-variant)来修正尺寸场,本文将 H 变化量的思想拓展到了背景网格单元内部,引入了尺寸梯度的概念,通过一系列公式推导,得到了二维的单元尺寸场的合理过渡要求。并以定义在非结构背景网格的单元尺寸场为例,提出了一种实现最少量地重置尺寸场中节点单元尺寸值,最大化地全局光滑单元尺寸场的修正算法。最后给出若干算例来展示本文算法的效果,并与 Persson<sup>[5]</sup>的求解 Hamilton-Jacobi 方程的光滑化算法进行比较,证明了算法的有效性。

## 1 基本概念和理论

### 1.1 单元尺寸场

考虑各向同性网格,其对应的单元尺寸场为定义在待网格化区域  $\Omega$  内部的数量函数:

**收稿日期:** 2013-11-26; **修回日期:** 2013-12-25。 **基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(11172267, 10872182, 61100160); 中央高校基本科研业务费专项(2012FZA4026); 浙江省自然科学基金资助项目(Y1110038)。

**作者简介:** 曾丽娟(1989-),女,江西宜春人,硕士研究生,主要研究方向:有限元网格生成; 李绍磊(1987-),男,山东聊城人,硕士研究生,主要研究方向:有限元网格生成; 朱朝艳(1979-),女,浙江宁波人,讲师,博士研究生,主要研究方向:有限元网格生成。

$$h = h(p); \quad p \in \Omega$$

其中:  $h$  为  $p$  点处的理想网格边长。

若考虑各向异性网格,同一点不同方向其单元尺寸值可能不同,相应地,对应的单元尺寸场为定义在待网格化区域  $\Omega$  内部的张量函数(以下简称其为尺寸张量):

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(p); \quad p \in \Omega$$

特别地,讨论定义在一条直线上的各向同性尺寸场时,尺寸张量简化为:

$$\mathbf{M} = [1/h^2(t)]$$

其中:  $h(t)$  ( $t \in [0,1]$ ) 为定义在直线上的单元尺寸函数,此时的尺寸场被称为单元尺寸场。

### 1.2 单元尺寸场的离散表征

有限元网格生成时,单元尺寸场很少用一个显式的函数表达,而是定义在一个离散的背景网格之上,并给背景网格顶点赋予一个尺寸量,背景网格内部的尺寸值则采用一定的插值函数予以近似。最常见的背景网格形式为非结构网格<sup>[6-7]</sup>和半结构直角网格<sup>[8-9]</sup>。本文讨论的概念和理论适用于任意背景网格形式,但在设计具体算法时,只考虑非结构背景网格。

### 1.3 单位网格

不难证明,在尺寸张量定义的黎曼空间内理想边长为1。简便起见,在这只讨论一维情形,相关推导可以拓展到任意维。如图1所示,定义在直线上的单元尺寸函数是  $h(t)$  ( $t \in [0,1]$ ),直线长度为  $l$ ,直线上的网格段数为  $n$ ,那么每一条网格边可表示为:

$$1 = l \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{1}{h(t)} dt; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

一维情形下,尺寸张量简化为  $\mathbf{M} = [1/h^2(t)]$ ,在  $\mathbf{M}$  定义的空间内网格边的长度是:

$$(\Delta l_i)_{\mathbf{M}} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{l \cdot \frac{1}{h^2(t)} \cdot l} dt = l \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{1}{h(t)} dt = 1;$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

也就是说由  $\mathbf{M}$  定义的空间内一条理想的网格边的长度是单位1,所以称之为单位网格<sup>[4]</sup>。

进一步,若  $h(t)$  是线性函数,假设网格段  $a_{i-1}a_i$  的长度是  $\Delta l_i$ ,那么满足:

$$1 = \begin{cases} \Delta l_i/h, & h_i = h_{i-1} = h \\ \Delta l_i \cdot \ln(h_i/h_{i-1})/(h_i - h_{i-1}), & h_i \neq h_{i-1} \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $i = 1, 2, \dots, n$ 。

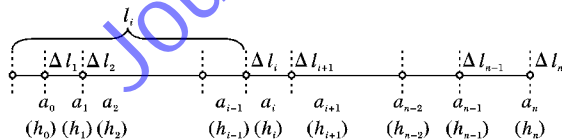


图1 一维网格示例

### 1.4 等比网格和准等比网格

如图1所示的网格中,  $\forall \beta \geq 1.0$ , 如果

$$\frac{\Delta l_{i+1}}{\Delta l_i} = \begin{cases} \beta, & \Delta l_{i+1} \geq \Delta l_i \\ 1/\beta, & \Delta l_{i+1} < \Delta l_i \end{cases}; \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

则称这样的网格为等比网格,如果仅仅要求

$$1/\beta \leq \Delta l_{i+1}/\Delta l_i \leq \beta; \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

则称这样的网格为准等比网格。

上面的定义中  $\beta$  是等比因子,它反映了用户对单元尺寸

过渡的直观要求(相邻网格边的边长比)。在常规的有限元网格生成中,  $\beta$  通常被设定小于1.2;而在很多物理量梯度很大的区域,如计算流体力学(Computational Fluid Dynamics, CFD)中的边界层,  $\beta$  通常被设定为1个更小的值。

## 2 Borouchaki 修正算法

### 2.1 H 变化量

Borouchaki 等<sup>[4]</sup>基于图1的网格提出了一维单元尺寸场的合理过渡要求。图1的网格满足以下3个假设:1)它是单位网格;2)它是等比因子为  $\beta$  的等比网格;3)其上单元尺寸场遵循线性变化规律。现给定其上2个端点的尺寸值,不失一般性,假设  $h_n > h_0$ , 且

$$\Delta h_{i+1}/\Delta h_i = \Delta l_{i+1}/\Delta l_i = \beta; \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2)$$

根据式(1),可得:

$$\frac{\Delta h_{i+1}}{\Delta h_i} = \beta \frac{\ln(h_{i+1}/h_i)}{\ln(h_i/h_{i-1})} \quad (3)$$

其中:  $\Delta h_{i+1} = h_{i+1} - h_i$  且  $\Delta h_i = h_i - h_{i-1}$ 。

根据式(2)和(3)可知  $h_{i+1}/h_i = h_i/h_{i-1}$ , 即此直线上网格点尺寸满足等比数列。假设  $\Delta h = h_n - h_0$ , 那么一条直线两端点间的尺寸差值与直线的长度的关系可表示为  $\Delta h/l = \ln \beta$ ; 如果图1的网格为准等比网格,则有  $\Delta h/l \leq \ln \beta$ 。

Borouchaki 称  $\Delta h/l$  为尺寸场  $h(t)$  的 H 变量,其本质是相距单位长度的两点其单元尺寸值的变化量。

### 2.2 Borouchaki 修正算法及其不足

通过2.1节推导可以看出,若用户希望得到等比因子为  $\beta$  的(准)等比网格,则单元尺寸场任意2点的 H 变量须等于(不能大于)  $\ln \beta$ , 以定义在二维非结构背景网格上的单元尺寸场为例分析, Borouchaki 等<sup>[4]</sup>考虑了网格边上的合理过渡要求,通过修正尺寸场来保证所有背景网格边的 H 变量都不大于  $\ln \beta$ 。

但是很多情形下,尺寸场并未被充分光滑,因为背景网格边上尺寸变化满足等比过渡要求,并不能保证整个背景网格单元内部尺寸能合理过渡,并且背景网格点尺寸的修正有连带反应,即相邻网格点修改的先后顺序会导致最后的尺寸场有所不同。为了克服 Borouchaki 等<sup>[4]</sup>修正算法的不足,下文提出了二维修正算法。

## 3 二维修正算法

### 3.1 尺寸梯度

现在将2.1节的推导拓展到二维情形。假设  $T$  为一个三角形背景网格单元,  $\Omega_T$  代表  $T$  覆盖的区域,  $\Omega_T$  上尺寸函数满足线性过渡规律:

$$h(x, y) = \sum_{i=0}^2 w_i(x, y) h_i; \quad (x, y) \in \Omega_T$$

其中:  $h_i$  ( $i = 0 \sim 2$ ) 是  $T$  上3个顶点的尺寸值,  $w_i(x, y)$  ( $i = 0 \sim 2$ ) 是  $\Omega_T$  内任意1点  $P$  的面积坐标值。给定等比因子  $\beta$  ( $\beta \geq 1.0$ ), 若  $\Omega_T$  上的尺寸场过渡合理,其内任意2点的 H 变量需满足:

$$h_v(p_1 p_2) = \frac{|h(p_2) - h(p_1)|}{|p_1 p_2|} \leq \ln \beta; \quad \forall p_1, p_2 \in \Omega_T \quad (4)$$

当  $p_2$  趋近  $p_1$  时,式(4)代表尺寸函数沿着  $p_1 p_2$  的方向导

数 $\circ p_1 p_2$ 可以是任意方向,所以有:

$$|\nabla h(p_1)| = \max_{\forall p_2 \in \Omega_T} \frac{\partial h}{\partial p_1 p_2} \leq \ln \beta; \quad \forall p_1 \in \Omega_T$$

线性函数 $h(x, y)$ 在 $\Omega_T$ 区域上的变化梯度是个常量:

$$\nabla h = \text{const} = \frac{1}{2A} \left( \sum_{i=0}^2 b_i h_i \sum_{i=0}^2 c_i h_i \right)^T \quad (5)$$

其中: $A$ 代表三角单元 $T$ 的面积, $b_i = y_j - y_m, c_i = x_m - x_j, i = 0 \sim 2, j = (i+1) \bmod 3, m = (j+1) \bmod 3, (x_i, y_i) (i = 0 \sim 2)$ 代表 $T$ 上3个顶点的坐标值。

将式(5)代入式(4),并将结果用矩阵方式写出,可得:

$$|\nabla h|^2 = \mathbf{H}^T \mathbf{K} \mathbf{H} \leq \ln^2(\beta) \quad (6)$$

其中:

$$\mathbf{H} = (h_0, h_1, h_2)^T$$

$$\mathbf{K} = [k_{ij}]_{0 \leq i, j \leq 2}; \quad k_{ij} = \frac{b_i b_j + c_i c_j}{4A^2}$$

$\mathbf{K}$ 是个对称矩阵,主对角线上的值都是正值:

$$k_{ii} = \frac{b_i^2 + c_i^2}{4A^2} = \frac{l_i^2}{4A^2} > 0$$

其中 $l_i$ 代表顶点 $i$ 对边的长度。

在这称 $|\nabla h|$ 为单元的尺寸梯度。式(6)表明,如要求三角形背景单元内部等比过渡,其尺寸梯度必须不大于 $\ln \beta$ 。

### 3.2 二维修正算法的数学模型

本文以定义在二维非结构背景网格上的单元尺寸场为例分析,假设背景网格点集合是 $P$ ,边集合是 $E$ ,单元集合是 $F$ 。显然,每条网格边的 $H$ 变量不大于 $\ln \beta$ 是整个二维尺寸场合理过渡的必要条件。只需求解如下最小化问题就能实现这一必要条件的平滑化过程:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{p \in P} (h'(p) - h(p))^2 \\ \text{s. t.} \quad & h'_e(e) \leq \ln \beta; \quad \forall e \in E \\ & h'(p) \leq h(p); \quad \forall p \in P \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $h'_e(e)$ 为尺寸场优化后网格边 $e$ 的 $H$ 变量值。注意:上述调整过程一般只允许减小顶点上的尺寸值,而不是相反。

一个背景单元的3条边满足 $\Delta h/l \leq \ln \beta$ 并不代表背景单元内部尺寸场满足等比过渡。每个网格单元尺寸梯度不大于 $\ln(\beta)$ 是整个二维尺寸场合理过渡的充分条件,只需求解如下最小化问题就能实现这一充分条件的平滑化过程:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{p \in P} (h'(p) - h(p))^2 \\ \text{s. t.} \quad & |\nabla h'|^2 = \mathbf{H}^T \mathbf{K} \mathbf{H} \leq \ln^2(\beta); \quad \forall f \in F \\ & h'(p) \leq h(p); \quad \forall p \in P \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $|\nabla h'|$ 为尺寸场优化后单元 $f$ 的尺寸梯度。

Borouchaki修正算法只考虑了式(7)所示的约束条件,很显然这是不够的。如果只考虑式(8)所示的最小化问题,原则上是可以保证整个尺寸场光滑化,由于其是二维上的修正,直接求解会造成尺寸场的改动过大,相应的计算量增加,从而降低整个求解过程的效率。如果考虑将式(7)所示的最小化问题作为预处理操作,会大大减少式(8)的计算量,所以本文结合了式(7)和式(8),提出2步走的尺寸场光滑策略。

本文算法输入为一个初始单元尺寸场,其上尺寸场定义不满足式(6)。通过执行本文算法,对若干背景网格顶点的尺寸值进行调整,输出的尺寸场将满足式(6),从而保证后续的网格生成算法若能遵循给定尺寸场,所生成的网格会满足合

理过渡的要求(相邻网格边长比小于用户给定的等比因子 $\beta$ )。本文光滑算法如下:

步骤1 求解式(7),保证所有背景网格边的 $H$ 变量都不大于 $\ln \beta$ 。

步骤2 求解式(8),保证所有背景网格单元的尺寸梯度都不大于 $\ln \beta$ 。

由于大部分尺寸调整都发生在步骤1,此时最小化目标未作放松,故而能避免尺寸改变过大的问题。而执行步骤2往往只涉及少量尺寸调整操作,故可以放松最小化目标,以方便算法的实现。2步执行完成后,修正后的尺寸场足够光滑。

具体实现时,步骤1需考虑最小化目标,使用开源库LPSolve求解<sup>[10]</sup>。步骤2放松最小化目标,只需对每个不满足式(6)的单元执行如下步骤,直至每个单元的尺寸梯度满足式(6):

1) 对3个顶点的尺寸值进行排序: $h_0 \leq h_1 \leq h_2$ 。

2) 尝试改变 $h_2$ 的值使之满足 $|\nabla h|^2 = \ln^2(\beta)$ ,可得到一个 $h_2$ 的新值:

$$h_2' = \frac{-r_b + \sqrt{r_b^2 - 4r_a r_c}}{2r_a}$$

其中:

$$r_a = k_{22}$$

$$r_b = (k_{02} + k_{20})h_0 + (k_{21} + k_{12})h_1 = 2k_{02}h_0 + 2k_{12}h_1$$

$$r_c = k_{00}h_0^2 + (k_{01} + k_{10})h_0h_1 + k_{11}h_1^2 - \ln^2(\beta) =$$

$$k_{00}h_0^2 + 2k_{01}h_0h_1 + k_{11}h_1^2 - \ln^2(\beta)$$

3) 当 $r_b^2 - 4r_a r_c < 0$ 时 $h_2'$ 无实数解,此时需同时更改 $h_1$ 和 $h_2$ :

$$h_1' = h_2' = (-z_b + \sqrt{z_b^2 - 4z_a z_c}) / (2z_a)$$

其中:

$$z_a = k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22} = k_{11} + 2k_{12} + k_{22} =$$

$$-(k_{01} + k_{02}) = k_{00}$$

$$z_b = (k_{01} + k_{10} + k_{02} + k_{20})h_0 = 2(k_{01} + k_{02})h_0 = 2k_{00}h_0$$

$$z_c = k_{00}h_0^2 - \ln^2(\beta)$$

不难证明,由于 $z_b^2 - 4z_a z_c = 4k_{00}h_0^2 - 4k_{00}(k_{00}h_0^2 - \ln^2(\beta)) = 4k_{00}\ln^2(\beta) \geq 0$ , $h_1'$ 和 $h_2'$ 始终有实数解。

## 4 实验结果及其分析

图2为一个吉他模型的实例,初始尺寸场都是采用几何自适应算法获得<sup>[11-13]</sup>,图2(a)和图2(b)分别给出了Borouchaki修正算法和本文修正算法控制下生成的有限元网格(采用同一网格生成程序)。不难看出,图2(b)的网格比图2(a)的网格质量更好,过渡更均匀。给出的吉他琴键处网格放大图对比效果更明显。分析表1给出的网格质量数据。其中最小单元内角和平均最小单元内角指示单元质量,相邻面积比和平均相邻单元面积比指示网格单元尺寸过渡是否合理。数据显示本文尺寸场修正算法控制下生成的有限元网格过渡更均匀。

为了更好地证明本文尺寸修正算法的工程应用价值,将之与Persson光滑化算法作比较。图3为一个钥匙模型,图3(a)的尺寸场是经过本文算法光滑过的,而3(b)是经过Persson算法光滑的,从图可以看出,图3(a)和3(b)网格质量效果相当,但3(a)网格过渡更平缓,网格数量略多,表1给出



了网格质量数据。Persson 算法有个很大的缺点是当输入的背景网格单元形状很差时,这一算法可能会引入较大的离散误差,导致光滑效果不理想,应用有一定的局限性。

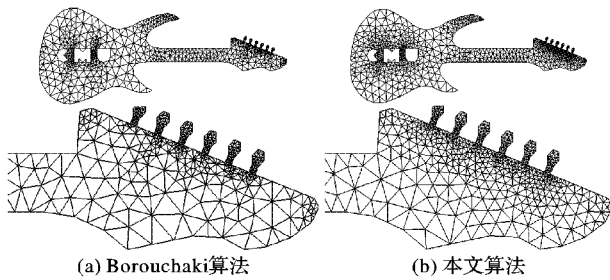


图2 吉他模型网格

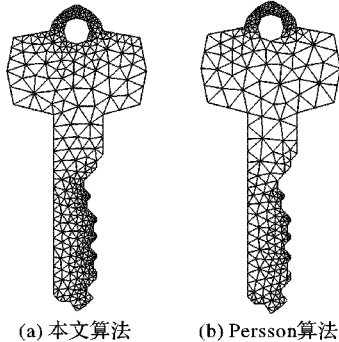


图3 钥匙模型网格

图4给出了2个更复杂的算例,图4(a)是某海湾模型,边界包含很多几何细节,图4(b)是一个机械零件的曲面模型。初始尺寸场均通过几何自适应算法获得,若光滑不充分,最终得到的网格会包含大量差单元。从图4效果和表1的数据分析看,执行本文提出的尺寸场光滑化算法后,网格质量高,过渡合理,可以满足有限元分析的需求。

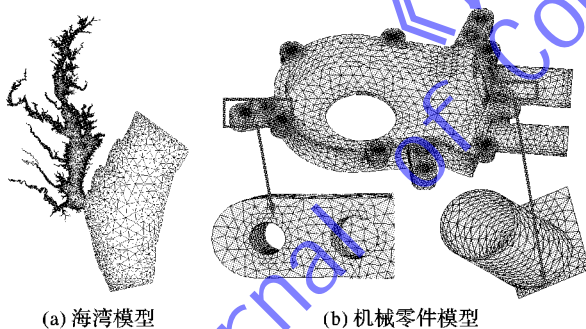


图4 海湾模型和机械零件模型网格

表1 网格实例质量分析

实例	最小单元 内角/(°)	平均单元 内角/(°)	最小相邻 单元面积比	平均相邻 单元面积比
图2(a)	20.13	45.53	0.20	0.65
图2(b)	23.56	47.30	0.31	0.74
图3(a)	20.78	41.20	0.28	0.69
图3(b)	21.45	42.19	0.25	0.64
图4(a)	20.33	46.25	0.31	0.78
图4(b)	20.45	46.45	0.28	0.75

## 5 结语

本文将H变化量的思想拓展到了单元网格内部,引入了尺寸梯度的概念,通过一系列公式推导得到了二维的单元尺寸场的合理过渡要求;以定义在非结构背景网格的单元尺寸

场为例,改进了 Borouchaki 的修正算法,提出了一种新的尺寸场光滑化算法,并通过具体算例对比验证了本文算法的有效性。本文讨论仅限于二维各向同性问题,但相关理论和算法可拓展到更高维问题和各向异性问题。

## 参考文献:

- [1] GUAN Z, SONG C, GU Y, *et al.* Recent advances of research on finite element mesh generation methods [J]. *Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics*, 2003, 15(1): 1-14. (关振群, 宋超, 顾元亮, 等. 有限元网格生成方法研究的新进展[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2003, 15(1): 1-14.)
- [2] ZHENG Y, WEATHERILL N P, TURNER-SMITH E A. An interactive geometry utility environment for multi-disciplinary computational engineering [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 53(6): 1277-1299.
- [3] ALAUZET F. Size gradation control of anisotropic meshes [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2010, 46(1/2): 181-202.
- [4] BOROUCHAKI H, HECHT F, PREY P J. Mesh gradation control [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998, 43(6): 1143-1165.
- [5] PERSSON P O. PDE-based gradient limiting for mesh size functions [EB/OL]. [2013-02-12]. <http://persson.berkeley.edu/pub/persson04gradlim.pdf>.
- [6] OWEN S J, SAIGAL S. Surface mesh sizing control [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, 47(1/2/3): 497-511.
- [7] CUNHA A, CANANN S, SAIGAL S. Automatic boundary sizing for 2D and 3D meshes [EB/OL]. [2013-02-18]. <http://www.cs.cmu.edu/afs/cs.cmu.edu/Web/People/cunha/pub/trends97.pdf>.
- [8] KANIA L A, PIRZADEH S Z. A geometrically-derived background function for automated unstructured mesh generation [C]// *Proceeding of the 17th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2005: 1601-1618.
- [9] QUADROS W R, VYAS V, BREWER M, *et al.* A computational framework for automating generation of sizing function in assembly meshing via disconnected skeletons [J]. *Engineering with Computers*, 2010, 26(3): 231-247.
- [10] BERKELAAR K, EIKLAND P, NOTEBAERT, *et al.* Ipsolve [EB/OL]. [2013-11-25]. <http://sourceforge.net/projects/ipsolve/>.
- [11] XIE L, CHEN J, LIANG Y, *et al.* Geometry-based adaptive mesh generation for continuous and discrete parametric surfaces [J]. *Journal of Information and Computational Science*, 2012, 9(8): 2327-2344.
- [12] LIANG Y, CHEN J, CHEN L, *et al.* Geometry-based adaptive parametric surface mesh generation [J]. *Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics*, 2010, 22(2): 327-335. (梁义, 陈建军, 陈立岗, 等. 几何自适应参数曲面网格生成[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2010, 22(2): 327-335.)
- [13] SUN L, ZHENG J, CHEN J, *et al.* Two-dimensional adaptive advancing front mesh generation [J]. *Computer Engineering and Applications*, 2011, 47(3): 146-148. (孙力胜, 郑建靖, 陈建军, 等. 二维自适应前沿推进网格生成[J]. *计算机工程与应用*, 2011, 47(3): 146-148.)