

文章编号:1001-9081(2014)05-1499-04

doi:10.11772/j.issn.1001-9081.2014.05.1499

基于新阈值函数的小波阈值去噪算法

王蓓*, 张根耀, 李智, 王静

(延安大学 数学与计算机科学学院, 陕西 延安 716000)

(*通信作者电子邮箱 wangbei7159@163.com)

摘要:针对传统小波阈值函数在阈值处的不连续性、小波估计系数存在偏差等不足,导致去噪后的图像出现失真、产生吉布斯震荡等问题,提出了一种改进的阈值函数,与常用的硬阈值、软阈值以及已有改进的阈值函数相比,该函数不仅易于计算,而且具有优越的数学特性。为了验证该阈值函数的优越性,通过仿真实验对几种小波去噪方法的峰值信噪比(PSNR)与均方差(MSE)进行了对比。实验结果表明,此去噪方法无论是在视觉效果上,还是在均方差和信噪比性能分析上均优于常用的阈值函数。

关键词:小波变换; 小波阈值去噪; 阈值函数; 均方差; 信噪比

中图分类号: TP391.413 **文献标志码:**A

Wavelet threshold denoising algorithm based on new threshold function

WANG Bei*, ZHANG Genyao, LI Zhi, WHANG Jing

(School of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an Shaanxi 716000, China)

Abstract: Since the traditional wavelet threshold functions have some drawbacks such as the non-continuity on the points of threshold, and large deviation of estimated wavelet coefficient, distortion and Gibbs phenomenon occur after denoising. To overcome these drawbacks, an improved threshold function was proposed. Compared with the hard, soft threshold functions and the existing improved threshold function, the proposed function not only is easy to be calculated, but also has the superior mathematical characteristics. To verify its advantages, a series of simulation experiments were performed, the Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR) and Mean Squared Error (MSE) values were compared with other different denoising methods. The experimental results indicate that it is better than above mentioned denoising methods in both the visual effects and the performance of PSNR and MSE.

Key words: wavelet transform; wavelet shrinkage; threshold function; Mean Squared Error (MSE); Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR)

0 引言

在实际生活中, 图像在获取和传输的过程中, 难免会受到各种各样的噪声污染, 图像去噪的目的就是尽量地减小噪声污染, 为以后进一步图像分割、图像识别、图像匹配等打下良好的基础。因此, 去噪是图像处理过程中必要的预处理。图像去噪方法主要分为空间域和变换域两种方法^[1-4]。空间域法是对图像像素进行处理, 如: 中值滤波、均值滤波等, 利用这些方法即便去除了噪声, 但不顾每个像素自身的特点, 以至于在去噪的同时, 模糊了图像的边缘细节; 变换域法是在图像经过某种变换后, 修改图像变换域的系数来达到去除图像噪声的目的, 其中小波就是很好的方法, 因为小波具有多分辨率、选基底灵活、低熵等优良的特性^[5], 尤其利用小波阈值去噪, 已成为去噪经典方法。

传统的阈值去噪法是 1995 年 Donoho^[6]提出的小波硬阈值与软阈值函数去噪方法, 该方法计算量小, 实现简单, 应用比较广泛。但这两种方法都有其自身的缺陷。文献[7]提出

了针对软阈值函数存在误差进行改进的方法; 文献[8]提出了将硬软阈值函数相结合进行改进的方法, 在实际应用中也取得了良好的效果, 然而也存在缺陷。文献[7]方法中的阈值函数缩减了恒定误差, 但阈值函数没有调节阈值因子, 不够灵活, 且连续性差; 文献[7]方法中的阈值函数很好地解决了阈值函数的连续性问题, 但却没有解决恒定误差这一问题。因此, 合理的阈值函数是小波阈值去噪方法的关键。针对文献[7-8]方法的优缺点, 本文提出了新的阈值函数, 这一函数既满足函数的连续性, 又解决了阈值函数恒定偏差问题。

1 小波阈值去噪原理

小波阈值去噪方法中噪声通常处于高频, 利用这一特点, 通过对高频部分进行相应阈值化处理, 然后进行重构, 这样就达到了去除噪声的目的。

假设一幅图像被高斯噪声污染的表示形式如下:

$$f_{j,k} = g_{j,k} + n_{j,k} \quad (1)$$

其中: $g_{j,k}$ 为源图像, 即表示图像中 (j, k) 点处的灰度值; $f_{j,k}$

收稿日期:2013-11-08;修回日期:2013-12-17。

基金项目:陕西省教育厅教育改革项目(2013JK1124);2012 级延安大学研究生创新计划项目。

作者简介:王蓓(1988-),女,陕西西安人,硕士研究生,主要研究方向:图像处理; 张根耀(1967-),男,陕西宜川人,教授,博士,主要研究方向:计算机软件、图像处理; 李智(1989-),男,陕西延安人,硕士研究生,主要研究方向:图像处理; 王静(1989-),女,陕西靖边人,硕士研究生,主要研究方向:图像处理。

为含噪声图像; $\mathbf{n}_{j,k}$ 为高斯白噪声, 服从正态分布 $N(0, \delta^2)$ 正态分布。

小波阈值方法通过以下 3 步骤进行实现:

- 1) 对 $f_{j,k}$ 作小波变换, 得到小波系数 $\mathbf{w}_{j,k}$;
- 2) 通过对 $\mathbf{w}_{j,k}$ 进行阈值化处理, 得出小波估计系数 $\hat{\mathbf{w}}_{j,k}$;
- 3) 利用 $\hat{\mathbf{w}}_{j,k}$ 进行小波系数重新构造得到去噪后的图像 $\hat{f}_{j,k}$ 。

常用的阈值求法^[9]有: 斯坦无偏似然估计准则、固定阈值准则、启发式阈值准则和极大极小原理准则。本文采用固定阈值准则固定阈值定义如下:

$$l = \delta \sqrt{2 \ln(M \times N)} \quad (2)$$

其中: $M \times N$ 为图像的大小。

2 小波阈值函数

2.1 常见的小波阈值函数

小波阈值去噪法的另一种称呼是阈值函数, 也就是利用阈值函数来获得阈值, 阈值函数应用最多的就是 Donoho 等提出的阈值的方法, 而且 Donoho 等^[10]也证明了利用小波阈值去噪比其他经典的去噪方法优越。随后人们在此基础上提出了改进的阈值函数, 如硬软折中阈值函数等。硬、软阈值函数分别如式(3)(4)。

硬阈值函数定义为:

$$\hat{\mathbf{w}}_{j,k} = \begin{cases} \mathbf{w}_{j,k}, & |\mathbf{w}_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |\mathbf{w}_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (3)$$

软阈值函数定义为:

$$\hat{\mathbf{w}}_{j,k} = \begin{cases} \text{sgn}(\mathbf{w}_{j,k})(|\mathbf{w}_{j,k}| - \lambda), & |\mathbf{w}_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |\mathbf{w}_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (4)$$

2.2 改进的小波阈值函数

硬、软阈值方法在去噪方面取得了较好的效果, 但它们存在缺点。式(3)虽然解决了 $|\hat{\mathbf{w}}_{j,k} - \mathbf{w}_{j,k}|$ 的误差问题, 但存在间断点 $\pm \lambda$, 在图像重建时会产生一些附加震荡, 而且比较容易出现 Pseudo-Gibbs 现象等视觉失真^[11]。同样, 式(4)在 $\pm \lambda$ 处连续性好, 但 $|\hat{\mathbf{w}}_{j,k} - \mathbf{w}_{j,k}|$ 存在恒定的误差, 这样会使图像的高频信息产生丢失等失真的现象^[12], 且式(4)存在高阶求导的困难, 不利于进一步用数学工具对它处理。硬软折中阈值函数对式(3)(4)进行了改进, 但依然存在恒定偏差问题。

为了更好地解决以上方法所带来的问题, 文献[7-8]分别提出了如下的改进的阈值函数:

$$\hat{\mathbf{w}}_{j,k} = \begin{cases} \text{sgn}(\mathbf{w}_{j,k}) \times \left(|\mathbf{w}_{j,k}| - \frac{2\lambda}{1 + e^{(-|\mathbf{w}_{j,k}| + \lambda)}} \right), & |\mathbf{w}_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |\mathbf{w}_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{w}}_{j,k} = \begin{cases} u\mathbf{w}_{j,k} + (1-u)\text{sgn}(\mathbf{w}_{j,k})(|\mathbf{w}_{j,k}| - \lambda), & |\mathbf{w}_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |\mathbf{w}_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (6)$$

其中: $u = 1 - e^{-\alpha(|\mathbf{w}_{j,k}| + \lambda)^2}$ 且 α 为正数。

式(5)很好地解决了含噪图像的小波系数与估计小波系

数恒等的误差问题, 但它没有调节因子, 显然不够灵活, 而且连续性差; 式(6)虽然解决了连续性问题, 但含噪图像的小波系数与估计小波系数的恒定偏差还是没有得到很好的解决。为了能够有效解决上述问题, 本文提出了新的函数:

$$\hat{\mathbf{w}}_{j,k} = \begin{cases} u\mathbf{w}_{j,k} + (1-u)\text{sgn}(\mathbf{w}_{j,k}) \times \\ \left(|\mathbf{w}_{j,k}| - \frac{2\lambda}{1 + e^{(-|\mathbf{w}_{j,k}| + \lambda)^n}} \right), & |\mathbf{w}_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |\mathbf{w}_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (7)$$

其中: $u = 1 - e^{-\alpha(|\mathbf{w}_{j,k}| + \lambda)^2}$ 且 α 为正数; n 为正数。

图 1 的横坐标为对 $f_{j,k}$ 经过小波变换得到的原始的小波系数; 纵坐标为对小波系数进行阈值处理后的得到的估计的小波系数。 λ 为门限值; 根据式(7)的函数进行绘图。图 1 中, $\lambda = 5$, 原始小波系数取值范围为 $-20 \sim 20$ 。

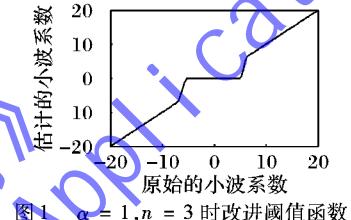


图 1 $\alpha = 1, n = 3$ 时改进阈值函数

2.2.1 改进的阈值函数分析

从数学的角度对式(7)进行如下分析。

1) 函数的连续性。

$$\lim_{\mathbf{w}_{j,k} \rightarrow \lambda^+} \hat{\mathbf{w}}_{j,k} = \lim_{\mathbf{w}_{j,k} \rightarrow \lambda^+} \left[u\mathbf{w}_{j,k} + (1-u)\text{sgn}(|\mathbf{w}_{j,k}|) \left(|\mathbf{w}_{j,k}| - \frac{2\lambda}{1 + e^{(-|\mathbf{w}_{j,k}| + \lambda)^n}} \right) \right] = \lim_{\mathbf{w}_{j,k} \rightarrow \lambda^+} \left[u\mathbf{w}_{j,k} + (1-u) \left(\mathbf{w}_{j,k} - \frac{2\lambda}{1 + e^{(-\mathbf{w}_{j,k} - \lambda)^n}} \right) \right] = 0$$

$$\lim_{\mathbf{w}_{j,k} \rightarrow \lambda^-} \hat{\mathbf{w}}_{j,k} = 0, \quad \lim_{\mathbf{w}_{j,k} \rightarrow \lambda^-} \hat{\mathbf{w}}_{j,k} = 0$$

所以可得: $\lim_{\mathbf{w}_{j,k} \rightarrow \lambda^+} \hat{\mathbf{w}}_{j,k} = \lim_{\mathbf{w}_{j,k} \rightarrow \lambda^-} \hat{\mathbf{w}}_{j,k} = 0$ 即在 λ 处连续。

$$\lim_{\mathbf{w}_{j,k} \rightarrow -\lambda^-} \hat{\mathbf{w}}_{j,k} = \lim_{\mathbf{w}_{j,k} \rightarrow -\lambda^-} \left[u\mathbf{w}_{j,k} + (1-u)\text{sgn}(|\mathbf{w}_{j,k}|) \left(|\mathbf{w}_{j,k}| - \frac{2\lambda}{1 + e^{(-|\mathbf{w}_{j,k}| + \lambda)^n}} \right) \right] = \lim_{\mathbf{w}_{j,k} \rightarrow -\lambda^-} \left[u\mathbf{w}_{j,k} + (1-u)(-1) \left(-\mathbf{w}_{j,k} - \frac{2\lambda}{1 + e^{(-\mathbf{w}_{j,k} - \lambda)^n}} \right) \right] = 0$$

$$\lim_{\mathbf{w}_{j,k} \rightarrow -\lambda^+} \hat{\mathbf{w}}_{j,k} = 0, \quad \lim_{\mathbf{w}_{j,k} \rightarrow -\lambda^+} \hat{\mathbf{w}}_{j,k} = 0$$

所以可得: $\lim_{\mathbf{w}_{j,k} \rightarrow -\lambda^+} \hat{\mathbf{w}}_{j,k} = \lim_{\mathbf{w}_{j,k} \rightarrow -\lambda^-} \hat{\mathbf{w}}_{j,k} = 0$ 即在 $-\lambda$ 处连续。

综上所述: 新阈值函数在 $\pm \lambda$ 处连续。

2) 函数的渐近性。

当 $\mathbf{w}_{j,k} \rightarrow -\infty$ 时

$$\lim_{\mathbf{w}_{j,k} \rightarrow -\infty} \frac{\hat{\mathbf{w}}_{j,k}}{\mathbf{w}_{j,k}} = \lim_{\mathbf{w}_{j,k} \rightarrow -\infty} \frac{u\mathbf{w}_{j,k} + (1-u)\text{sgn}(|\mathbf{w}_{j,k}|) \left(|\mathbf{w}_{j,k}| - \frac{2\lambda}{1 + e^{(-|\mathbf{w}_{j,k}| + \lambda)^n}} \right)}{\mathbf{w}_{j,k}} = \lim_{\mathbf{w}_{j,k} \rightarrow -\infty} \left[1 + \frac{2\lambda(1-u)}{(1 + e^{(-\mathbf{w}_{j,k} - \lambda)^n})\mathbf{w}_{j,k}} \right] = 1$$

当 $w_{j,k} \rightarrow +\infty$ 时

$$\lim_{w_{j,k} \rightarrow +\infty} \frac{\hat{w}_{j,k}}{w_{j,k}} = \lim_{w_{j,k} \rightarrow +\infty} \frac{uw_{j,k} + (1-u)\left(w_{j,k} - \frac{2\lambda}{1+e^{(w_{j,k}-\lambda)^n}}\right)}{w_{j,k}} = \lim_{w_{j,k} \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{2\lambda(1-u)}{(1+e^{(w_{j,k}-\lambda)^n})w_{j,k}}\right] = 1$$

$$\lim_{w_{j,k} \rightarrow -\infty} \frac{\hat{w}_{j,k}}{w_{j,k}} = \lim_{w_{j,k} \rightarrow -\infty} \frac{\hat{w}_{j,k}}{w_{j,k}} = 1$$

当 $w_{j,k} \rightarrow \infty$ 时

$$\lim_{w_{j,k} \rightarrow \infty} (\hat{w}_{j,k} - w_{j,k}) = \lim_{w_{j,k} \rightarrow \infty} \left[uw_{j,k} + (1-u)\operatorname{sgn}(w_{j,k}) \times \left(|w_{j,k}| - \frac{2\lambda}{1+e^{(|w_{j,k}|-\lambda)^n}}\right) - w_{j,k}\right] = 0$$

综上所述:函数式(7)是以 $\hat{w}_{j,k} = w_{j,k}$ 为渐近线的,也就是说,新阈值函数以 $\hat{w}_{j,k} = w_{j,k}$ 为渐近线。

3) 阈值函数的偏差性。

$$\begin{aligned} & \lim_{w_{j,k} \rightarrow +\infty} (\hat{w}_{j,k} - w_{j,k}) = \\ & \lim_{w_{j,k} \rightarrow +\infty} \left[uw_{j,k} + (1-u)\left(w_{j,k} - \frac{2\lambda}{1+e^{(w_{j,k}-\lambda)^n}}\right) - w_{j,k}\right] = 0 \\ & \lim_{w_{j,k} \rightarrow -\infty} (\hat{w}_{j,k} - w_{j,k}) = \\ & \lim_{w_{j,k} \rightarrow -\infty} \left[uw_{j,k} - (1-u)\left(-w_{j,k} - \frac{2\lambda}{1+e^{(w_{j,k}-\lambda)^n}}\right) - w_{j,k}\right] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{所以可得: } \lim_{w_{j,k} \rightarrow +\infty} (\hat{w}_{j,k} - w_{j,k}) = \lim_{w_{j,k} \rightarrow -\infty} (\hat{w}_{j,k} - w_{j,k}) = 0$$

随着 $w_{j,k} \rightarrow \infty$, $\hat{w}_{j,k}$ 逐渐接近 $w_{j,k}$,从而克服了 $\hat{w}_{j,k}$ 与 $w_{j,k}$ 之间具有偏差的问题。

4) 函数的高阶可导性。

当 $|w_{j,k}| \geq \lambda$ 时,新阈值函数满足高阶可导,所以便于进行各种数学处理。

5) 阈值可变因子 α 与 n 影响分析。

当 $\alpha = 0, n = 1$ 时,新阈值函数为式(5);当 $\alpha = 0, n \rightarrow 0$ 时,新阈值函数为软阈值函数,当 $n \rightarrow \infty$ 时新阈值函数为硬阈值函数;

当 $\alpha \rightarrow \infty$ 时新阈值函数就变成为硬阈值函数;因此与式(5)和式(6)相比,新阈值函数不仅具有整体连续性的优点,而且根据实际应用调节非常灵活。

2.2.2 改进的阈值函数去噪算法步骤

第1步 选择合适的小波基函数,小波基一般根据具体噪声图像的特点进行选择。然后对带噪声图像式(1)中 $f_{j,k}$ 进行多层次正交小波变换,得到一组小波分解系数 $w_{j,k}$,其中: $w_{j,1} \in \{\mathbf{LH}_j\}$ (j 层水平方向小波系数); $w_{j,2} \in \{\mathbf{HL}_j\}$ (j 层垂直方向小波系数); $w_{j,3} \in \{\mathbf{HH}_j\}$ (j 层对角线方向小波系数); ($j = 1, 2, \dots, l, l$ 表示小波分解的层数)。

第2步 对式(1)中噪声 $n_{j,k}$ 方差 δ 进行估计,根据文献[11],噪声方差 $\delta = \text{median}(|w_{1,3}|/c)$,其中 c 是常数,一般取 0.6745。然后在求出 δ 的基础上,根据式(2)求出门限阈值 λ 的值。

第3步 以 λ 为门限,分别根据式(7)对 $\mathbf{LH}_j, \mathbf{HL}_j, \mathbf{HH}_j$

系数进行阈值处理,得到估计的小波系数 $\hat{w}_{j,k}$ 。

第4步 根据所得 $\hat{w}_{j,k}$ 小波系数以及其他没有进行阈值处理的低频部分的小波系数利用小波基函数进行小波重新构造,从而得到去噪后的图像 $\hat{f}_{j,k}$ 即 $\hat{f}_{j,k}$ 就是所要求的图像。

3 实验结果及分析

为了证明改进阈值函数去噪的有效性,使用 Matlab 软件^[13]对加 0.01 的高斯白噪的 Lena 和 Cameraman 图像分别用经典的软、硬阈值函数、硬软折中阈值函数、文献[3]、文献[4]以及改进的阈值函数进行仿真实验。本文基于提升图像的对称性,视觉好,更适合于图像处理,因而选择 coif4 基函数^[14],进行四层分解与重构,并进行阈值去噪。去噪效果如图 2 所示。



图 2 对 Lena 图像不同方法降噪结果



图 3 对 Cameraman 图像不同方法降噪结果

为了进一步衡量本文提出新阈值函数的性能,用均方差 (Mean Squared Error, MSE)^[9] 与峰值信噪比 (Peak Signal-to-Noise Ratio, PSNR) 对去噪后效果分析。MSE 的值越小表示图像的质量越好;PSNR 的值越大图像的质量越好。它们分别定义为:

$$MSE = \frac{1}{M \times N} \left[\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (g_{j,k} - \hat{f}_{j,k})^2 \right] \quad (8)$$

$$PSNR = 10 \times \lg(255^2 / MSE) \quad (9)$$

其中: $M \times N$ 为图像大小, $g_{j,k}$ 是无噪图像, $\hat{f}_{j,k}$ 为去噪得到的图像。

通过仿真实验表明:基于改进阈值函数的小波去噪比基于软阈值函数、硬阈值函数、硬软折中阈值函数、文献[3]阈值函数、文献[4]阈值函数得到较大的峰值信噪比和较小的均方误差。实验具体的结果如表 1、表 2 所示。由图 2、图 3 可以看出改进阈值函数的小波去噪效果较好。

4 结语

本文在分析了 Dohono 软硬阈值、硬软折中阈值函数以及文献[3]、文献[4]的优缺点后,提出了对阈值函数的改进算法。这一阈值函数含有两个调节阈值因子 α 和 n ,通过改变这两个参数,达到最佳小波系数阈值的估计,经过实验证明,改进的阈值函数能够较好地去除图像噪声,且可以保护图像的细节信息。

表 1 降噪后 Lena 图像的 PSNR 和 MSE 对比

降噪方法	PSNR /dB	MSE
软阈值法	22.7763	343.1255
硬阈值法	24.1523	295.2935
折中阈值法($\alpha=0.5$)	24.1156	252.0710
文献[3]阈值法	23.6083	283.3055
文献[4]阈值法($\alpha=3$)	23.8284	269.3030
本文算法($\alpha=3, n=0.125$)	24.2740	243.0390

表 2 降噪后 Cameraman 图像的 PSNR 和 MSE 对比

降噪方法	PSNR /dB	MSE
软阈值	21.9995	410.3229
硬阈值	23.6655	359.5940
折中阈值法($\alpha=0.5$)	23.1793	312.7160
文献[3]阈值法	22.7534	344.9375
文献[4]阈值法($\alpha=8$)	22.7932	341.7903
本文算法($\alpha=8, n=0.125$)	23.7690	306.3230

参考文献:

- [1] ZHAO J, SUN H, DENG C, et al. Particle swarm optimization based adaptive image denoising in Shearlet domain [J]. Journal of Chinese Computer Systems, 2011, 32(6):1147–1150. (赵嘉, 孙辉, 邓承志, 等. 基于粒子群优化的 Shearlet 自适应图像去噪 [J]. 小型微型计算机系统, 2011, 32(6):1147–1150.)
- [2] YANG N, WU C, QU H. Mixed noised denoised based on partial differential equation [J]. Application Research of Computers, 2013, 30(6):1899–1902. (杨农丰, 吴成茂, 屈汉章. 基于偏微分方程的混合噪声去噪研究 [J]. 计算机应用研究, 2013, 30(6):1899–1902.)
- [3] ZHANG Y, ZHANG P, WANG G, et al. Denoising method for color images based on chrominance model and curvelet transform [J]. Journal of Image and Graphics, 2012, 17(12):1472–1477. (张云强, 张培林, 王国德, 等. 基于曲波变换和色度模型的彩色图像去噪 [J]. 中国图象图形学报, 2012, 17(12):1472–1477.)
- [4] ZHANG L, LI X. Image denoising method of partial differential e-
- [5] LI X, ZHU S. Survey of wavelet domain image denoising [J]. Journal of Image and Graphics, 2006, 11(9):1201–1209. (李旭超, 朱善安. 小波域图像降噪概述 [J]. 中国图象图形学报, 2006, 11(9):1201–1209.)
- [6] DONOHO D L. De-noising by soft-thresholding [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1995, 41(3):613–627.
- [7] ZHOU X, ZHU W, GUO Q. The denoising of ultrasonic signal based on asymptotic semi-soft thresholding function [J]. Journal of Detection and Control, 2011, 33(2):35–39. (周西峰, 朱文文, 郭前岗. 基于渐近半软阈值函数的超声信号去噪方法 [J]. 探测与控制学报, 2011, 33(2):35–39.)
- [8] ZHANG L, QIN H, YU C. Research of denoising method based on wavelet threshold [J]. Computer Engineering and Applications, 2008, 44(9):172–173. (张莲, 秦华锋, 余成波. 基于小波阈值去噪算法的研究 [J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(9):172–173.)
- [9] LIU Z, YANG W, ZHANG C. Destriping method based on transform domain [J]. Journal of Computer Applications, 2013, 33(9):2603–2605. (刘召海, 杨文柱, 张辰. 基于变换域的条带噪声去除方法 [J]. 计算机应用, 2013, 33(9):2603–2605.)
- [10] DONOHO D L, JONSTONE I M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage [J]. Journal of the American Statistical Association, 1995, 90(432):1200–1224.
- [11] YE C, HUANG Y. New improvement of wavelet threshold denoising algorithm [J]. Computer Engineering and Applications, 2011, 47(12):141–146. (叶重元, 黄永东. 小波阈值去噪算法的新改进 [J]. 计算机工程与应用, 2011, 47(12):141–146.)
- [12] ZHANG W, SONG G. Signal de-noising in wavelet domain based on a new kind of thresholding function [J]. Journal of Xidian University: Natural Science, 2004, 31(2):296–303. (张维强, 宋国乡. 基于一种新的阈值函数的小波域信号去噪 [J]. 西安电子科技大学学报: 自然科学版, 2004, 31(2):296–303.)
- [13] LIU G, WANG L, DONG Y. Digital image processing using Matlab [M]. Beijing: China Machine Press, 2010:223–250. (刘刚, 王立香, 董延. Matlab 数学图像处理 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2010:223–250.)
- [14] ZHENG J, HOU R. Selection of wavelet base in denoising of wavelet transform [J]. Journal of Shenyang University, 2009, 21(2):108–110. (郑钧, 侯锐峰. 小波去噪中小波基的选择 [J]. 沈阳大学学报, 2009, 21(2):108–110.)

(上接第 1493 页)

- [10] MURPHY M, ALLEY M, DEMMEL J, et al. Fast ℓ_1 -SPIRiT compressed sensing parallel imaging MRI: scalable parallel implementation and clinically feasible runtime [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2012, 31(6):1250–1262.
- [11] CHANG Y, LIANG D, YING L. Nonlinear GRAPPA: a kernel approach to parallel MRI reconstruction [J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2012, 68(3):730–740.
- [12] MAJUMDAR A, WARD R K. Nuclear norm-regularized SENSE reconstruction [J]. Magnetic Resonance Imaging, 2012, 30(2):213–221.
- [13] LUSTIG M, ALLEY M, VASANAWALA S, et al. L_1 SPIRiT: auto-calibrating parallel imaging compressed sensing [J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2009, 17(2):379–379.
- [14] LUSTIG M, PAULY J M. SPIRiT: iterative self-consistent parallel imaging reconstruction from arbitrary k -space [J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2010, 64(2):457–471.
- [15] DUAN Y, MA L, LI Y, et al. Improved soft-threshold denoising algorithm based on wavelet analysis [J]. Science Technology and Engineering, 2010, 10(23):5755–5758. (段永刚, 马立元, 李永军, 等. 基于小波分析的改进软阈值去噪算法 [J]. 科学与工程, 2010, 10(23):5755–5758.)