

扇束 CT 极坐标反投影重建算法的对称优化

张 晶¹, 张 权¹, 刘 祎¹, 桂志国^{1,2*}

(1. 电子测试技术国防重点实验室(中北大学), 太原 030051; 2. 仪器科学与动态测试教育部重点实验室(中北大学), 太原 030051)
(*通信作者电子邮箱 gzgtg@163.com)

摘 要: 为了提高扇束滤波反投影(FBP)算法重建图像的速度, 提出一种极坐标反投影算法的优化快速重建方法。算法利用三角函数对称性对多幅预处理后的投影数据同时进行极坐标反投影运算; 在反投影数据坐标转换时运用像素位置参数的对称性, 以减少双线性插值的计算量。实验结果表明, 在不牺牲重建图像质量前提下, 与传统卷积反投影重建算法相比, 优化算法的重建速度提高 8 倍以上。该优化方法也适用于三维锥束重建, 并可推广到多层螺旋三维重建。

关键词: 计算机层析成像; 滤波反投影; 极坐标反投影; 重建; 对称性

中图分类号: TP391.98 **文献标志码:** A

Symmetry optimization of polar coordinate back-projection reconstruction algorithm for fan beam CT

ZHANG Jing¹, ZHANG Quan¹, LIU Yi¹, GUI Zhiguo^{1,2*}

(1. National Key Laboratory for Electronic Measurement Technology (North University of China), Taiyuan, Shanxi 030051, China;

2. Key Laboratory of Instrumentation Science and Dynamic Measurement, Ministry of Education
(North University of China), Taiyuan, Shanxi 030051, China)

Abstract: To improve the speed of image reconstruction based on fan-beam Filtered Back Projection (FBP), a new optimized fast reconstruction method was proposed for polar back-projection algorithm. According to the symmetry feature of trigonometric function, the preprocessing projection datum were back-projected on the polar coordinates at the same time. During the back-projection data coordinate transformation, the computation of bilinear interpolation could be reduced by using the symmetry of the pixel position parameters. The experimental result shows that, compared with the traditional convolution back-projection algorithm, the speed of reconstruction can be improved more than eight times by the proposed method without sacrificing image quality. The new method is also applicable to 3D cone-beam reconstruction, and can be extended to multilayer spiral three-dimensional reconstruction.

Key words: Computed Tomography (CT); filtered back-projection; polar coordinates back-projection; reconstruction; symmetry

0 引言

计算机层析成像(Computed Tomography, CT)^[1]技术以无损、直观、准确的方式显示物体的内部结构、材质分布和缺陷等信息, 目前已经广泛应用于医学诊断、工业制造、军工、安检等领域, 被誉为最佳的现代无损检测技术之一。在工程上, 常用的扫描方式有以线阵探测器为主的扇束 CT 扫描方式和以平板探测器为主的锥束扫描方式。在扇束 CT 扫描方式中最为常用的是滤波反投影(Filtered Back-Projection, FBP)算法^[2-4]。FBP 算法属于 CT 重建算法中解析一类, 尽管与迭代算法, 如代数重建技术(Algebraic Reconstruction Technique, ART)^[5]、联合代数重建技术(Simultaneous ART, SART)^[6]、交叉熵(Cross Entropy, CE)算法^[7]相比, 具有较高的运算效率、重建图像效果好等优点, 为了满足 CT 的检测要求, 该算法计算量仍很大, 提高其重建速度是关键。

FBP 算法由投影加权、卷积滤波和反投影三部分组成。分析表明这三部分的运算分别占总运算量的 0.001 6%, 1.6% 和 98.36%, 三者相比较, 提高反投影的运算速度是提高该算法重建速度的根本问题。针对这个问题, 国内在此方面同样做了大量的研究工作, 但主要以两种反投影为主: 平行射线束型反投影和扇束等角射线型反投影。如文献[8]介绍了一种快速的平行束 CT 重建算法, 该算法可以应用于扇束数据重排算法中, 但会产生伪影并增加额外的计算量; 文献[9]介绍了三角函数性质对扇束反投影过程进行优化的方法, 重建算法简称为 SBP(Symmetry Back-Projection)算法, 该算法将 8 幅反投影同时进行, 最外层循环减少为传统的 1/8, 在没有结合递归迭代的情况下, 与卷积反投影(Conventional Back-Projection, CBP)算法相比速度提高 3 倍左右; 文献[10]提出了基于极坐标反投影(Polar Coordinates Back-Projection, PCBP)的几何参数法, 即提前计算出反投影地址和加权因子,

收稿日期: 2013-11-19; **修回日期:** 2013-12-18。 **基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(61071192, 61271357, 61171178); 山西省国际合作项目(2013081035); 中北大学第十届研究生科技基金资助项目(20131035); 山西省研究生优秀创新项目(20123098)。

作者简介: 张晶(1988-), 女, 吉林公主岭人, 硕士研究生, 主要研究方向: 图像处理、医学图像重建; 张权(1974-), 男, 山西大同人, 副教授, 博士研究生, 主要研究方向: 图像处理、图像重建; 刘祎(1987-), 女, 河南商丘人, 博士研究生, 主要研究方向: 图像处理、医学图像重建; 桂志国(1972-), 男, 天津人, 教授, 博士, 主要研究方向: 无损检测、图像处理与重建。

以表的形式存储,虽速度得到提高但大大占用内存,得不偿失;文献[11]在极坐标反投影重建算法中提出结合查找表来提高重建速度,由于极坐标反投影数据转换到笛卡儿坐标系中需双线性插值的方法,增加了计算量,速度提高受到限制;文献[12]基于极坐标反投影重建算法的特点,运用三角函数对称性,对16幅投影数据同时进行反投影重建,称为优化极坐标反投影(Optimized PCBP, OPCBP)算法,该算法在不应用查找表情况下速度可提高4倍,若结合几何参数法时速度可提高8倍。

本文采用扇束等距扫描方式,在上述研究的基础上,根据极坐标反投影重建算法的特性,利用正余弦函数对称特性,将64幅预处理后的投影数据同时进行反投影运算,外层循环次数是传统算法的1/16,从而实现极坐标重建算法的对称优化,称为极坐标反投影对称重建(Symmetry PCBP, SPCBP)算法。与CBP算法相比,不采用查找表时重建速度提高8倍以上,采用查找表时重建速度提高10倍,并均不引入额外误差。

1 传统算法

滤波反投影(FBP)重建算法与卷积反投影(CBP)重建算法本质是相同的,差别仅仅是前者在频域中对投影数据滤波,而后者在空域对投影数据滤波。本文选择后者作为研究对象,令 (r, θ) 表示为待重建图像内任意一点位置, $a(r, \theta)$ 表示为待重建图像的衰减系数分布函数, $p(s, \beta)$ 为扫描角 β 下的投影值关于距离 s 的函数。如图1所示: S_0 为射线源, S_0O 为中心射线, D 表示射线源到旋转中心射线距离。

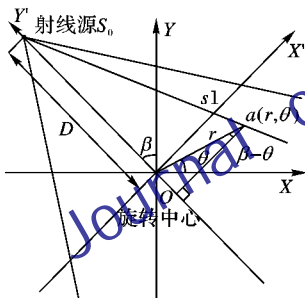


图1 扇束扫描示意图

扇束 CBP 算法重建公式为:

$$a(r, \theta) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{U^2} \tilde{p}^e(s1, \beta) d\beta \quad (1)$$

$$\tilde{p}^e(s, \beta) = p^e(s, \beta) \times (h(s)/2) \quad (2)$$

$$p^e(s, \beta) = p(s, \beta) \frac{D}{\sqrt{D^2 + s^2}} \quad (3)$$

$$s1 = \frac{Dr \cos(\beta - \theta)}{D + r \sin(\beta - \theta)} = \frac{D(x \cos \beta + y \sin \beta)}{D + x \sin \beta - y \cos \beta} \quad (4)$$

$$U = \frac{D + r \sin(\beta - \theta)}{D} = \frac{D + x \sin \beta - y \cos \beta}{D} \quad (5)$$

扇束 CBP 重建时,先进行式(3)对投影数据加权,其次用式(2)滤波,通过式(4)和(5)确定在扇角 β 下反投影地址 $s1$ 和加权因子 U 的值,最后通过式(1)对滤波后的数据 $\tilde{p}^e(s, \beta)$ 反投影。

由于计算机对三角函数采用泰勒公式计算方法,则反投影中计算投影地址 $s1$ 和加权系数 U 最耗时。设 $[0^\circ, 360^\circ]$ 扫描视角内,投影视图数为 M ,在每个投影角下采样点为 N ,重

建图像大小为 $N \times N$,对于笛卡儿坐标系下重建图像,计算一次 $s1$ 和 U 需要9次乘法(包括2次除法),5次加法(可忽略不计),6次三角运算,并外层有三重循环。总的循环需 $9MN^2$ 次乘法, $6MN^2$ 次三角函数运算。通过上述分析,提高速度的关键是减少 $s1$ 与 U 的计算量。

2 极坐标反投影重建算法

根据式(4)和(5)可知, $s1$ 和 U 的值可由 (β, θ, r) 求得。这是在极坐标下进行反投影重建的依据。设 $a(r, \theta)$ 为待重建图像,在 $[0^\circ, 360^\circ]$ 扫描角下 $\Delta\theta = 1, r_{\max} = N/\sqrt{2}$ 。假定视图数和相位数为 M ,程序流程如图2所示,则计算一次 $s1$ 和 U 需要4次乘法,2次除法,3次三角函数运算。整个重建过程中总的循环次数需 $6M^2N/\sqrt{2}$ 次乘法, $3M^2N/\sqrt{2}$ 次三角函数运算。如若 $M = 360, N = 512$,约为CBP算法中乘法运算的33.1%、三角函数运算的13.8%,理论上计算量得到很大程度的降低。在此处,由于 $s1$ 和 U 计算式中仍需三角函数运算,故可应用正余弦函数对称性质进行优化,同时为降低重建时间提供依据。

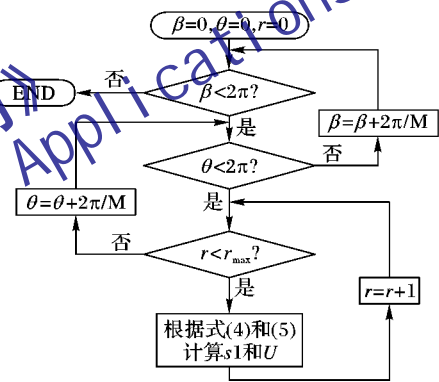


图2 PCBP 算法流程

3 快速重建算法

3.1 对称法

在极坐标反投影过程中频繁地使用三角函数,其输入量由射线扫描时的几何位置确定,如果直接调用三角函数非常耗时。本文在此提出一种新方法,利用对称性使多个角度下的反投影过程同时进行,对极坐标下重建算法进行对称优化,大大降低计算量,减少极重建算法的外层的循环次数,达到减少重建过程的 $s1$ 和 U 计算量的目的,从而提高极坐标算法重建速度。 β 和 θ 均在 $[0^\circ, 45^\circ]$,设: $C = \cos(\beta - \theta), S = \sin(\beta - \theta), C1 = (\sqrt{2}/2)\cos(\beta - \theta), S1 = (\sqrt{2}/2)\sin(\beta - \theta)$ 。

令 i 从0到7(步长为1)逐渐增加,根据三角函数性质有:

1) 当 β 和 θ 均不变时:

$$\cos(\beta + 45i - (\theta + 45i)) = C$$

$$\sin(\beta + 45i - (\theta + 45i)) = S$$

2) 当 β 不变, θ 增加 45° 时:

$$\cos(\beta + 45i - (\theta + 45(i+1))) = C1$$

$$\sin(\beta + 45i - (\theta + 45(i+1))) = S1$$

3) 当 β 不变, θ 增加 90° 时:

$$\cos(\beta + 45i - (\theta + 45(i+2))) = S$$

$$\sin(\beta + 45i - (\theta + 45(i+2))) = -C$$

4) 当 β 不变, θ 增加 135° 时:

$$\cos(\beta + 45i - (\theta + 45(i+3))) = S1$$

$$\sin(\beta + 45i - (\theta + 45(i+3))) = -C1$$

5) 当 β 不变, θ 增加 180° 时:

$$\cos(\beta + 45i - (\theta + 45(i+4))) = -C$$

$$\sin(\beta + 45i - (\theta + 45(i+4))) = -S$$

6) 当 β 不变, θ 增加 225° 时:

$$\cos(\beta + 45i - (\theta + 45(i+5))) = -C1$$

$$\sin(\beta + 45i - (\theta + 45(i+5))) = -S1$$

7) 当 β 不变, θ 增加 270° 时:

$$\cos(\beta + 45i - (\theta + 45(i+6))) = -S$$

$$\sin(\beta + 45i - (\theta + 45(i+6))) = C$$

8) 当 β 不变, θ 增加 315° 时:

$$\cos(\beta + 45i - (\theta + 45(i+7))) = -S1$$

$$\sin(\beta + 45i - (\theta + 45(i+7))) = C1$$

从中可得到:在循环中,只要计算 β 和 θ , $\theta + 45^\circ$, $\theta + 90^\circ$, $\theta + 135^\circ$, $\theta + 180^\circ$, $\theta + 225^\circ$, $\theta + 270^\circ$, $\theta + 315^\circ$ 下的投影地址 $s1$ 和加权因子 U , 则 64 幅投影数据可同时进行反投影运算, 这样外层循环直接为极坐标重建算法的 $1/16$; 但同时在计算 $S1$ 和 $C1$ 时增加了 2 次加法(可忽略)和 2 次乘法。本文提出算法称为极坐标反投影对称重建 (SPCBP) 算法, 采用查找表时称为极坐标反投影对称快速重建 (Quick SPCBP, QSPCBP) 算法, 程序流程如图 3 所示。在循环体中只要计算 8 次投影地址 $s1$ 和加权因子 U , 三角函数运算需 2 次, 而计算一次 $s1$ 和 U 需 6 次乘法, 整个反投影过程需 $(6 \times 8 + 2) \times 45 \times 45 \times r_{\max}$ 次乘法, $2 \times 45 \times 45 \times r_{\max}$ 次三角函数运算。实验中重建 360 幅投影重建 512×512 图像(以下图像大小均以此为标准), CBP 算法需大约 9×10^7 次循环计算, 在 CBP 基础上应用正余弦性质的 SBP 算法需 $4 \times 512 \times 512$ 次循环, 大约为 10^7 次循环计算; 在极坐标重建中, r_{\max} 为 364, PCBP 算法需 $360 \times 360 \times 364$ 次循环, 约为 4×10^7 次, 约为 CBP 的 50%, 本文提出的 SPCBP 算法需 $45 \times 45 \times 364$ 次循环, 约为 7.4×10^5 , 约为 CBP 的 0.75%, 理论上速度大大提高。同时可结合查找表法, 存储正余弦 0° 到 44° 的值, 可大大减少所占内存。

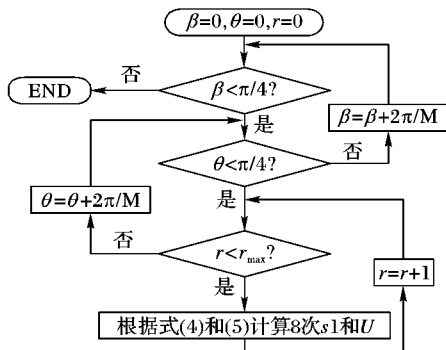


图3 SPCBP 算法流程

3.2 极坐标反投影转换到笛卡儿坐标系

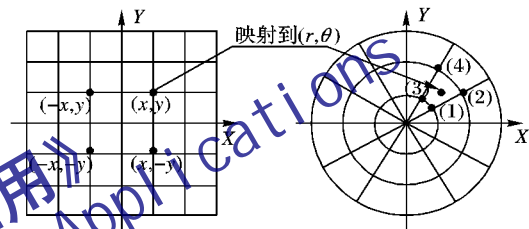
极坐标向笛卡儿坐标转换, 即 $a(r, \theta)$ 转换为 $a(x, y)$, 从笛卡儿坐标向极坐标映射的变换公式: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan(y/x)$; 坐标转换如图 4 所示。本文采用双线性插值以减少失真, 双线性变换公式:

$$a(x, y) = (1 - \alpha)(1 - \tau)a(r_i, \theta_j) + (1 - \alpha)\tau a(r_i, \theta_{j+1}) + \alpha(1 - \tau)a(r_{i+1}, \theta_j) + \alpha\tau a(r_{i+1}, \theta_{j+1}) \quad (6)$$

其中: $\alpha = (r - r_i)/\Delta r$, $\tau = (\theta - \theta_j)/\Delta \theta$, 这里 $\Delta r = 1$, $\Delta \theta = 1$;

$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$, $\theta_j = \arctan(y_i/x_i)$ 。使用双线性插值方法同时也会增加额外的计算量, 影响重建速度。本文采取坐标对称的方法来降低计算量。

在图 4 中, (x, y) , $(-x, y)$, $(-x, -y)$, $(x, -y)$ 点具有相同的 r_i , 第一象限的点角度为 θ_j , 相对应在第二、三、四象限点的角度分别为 $180 - \theta_j$, $180 + \theta_j$, $360 - \theta_j$ 。同时第一、三象限的点具有相同的 α 和 τ , 第二、四象限点的 (α, τ) 与第一象限相对的 (α, τ) 和为 1, 则根据第一象限图像的几何参数来确定整幅图像的几何参数。所以在第一象限坐标转换中, 可同时完成 4 个象限的图像转换, 减少了 $3 \times 256 \times 256$ 次三角函数运算, $5 \times 256 \times 256$ 次乘法运算, 即约 2×10^5 次三角函数运算和 3×10^5 次乘法。在不使用查找表的前提下, 很大程度上减少了计算量, 若使用查找表, 也只需 1.25 MB 内存。



注: (1)表示 (r_i, θ_j) ; (2)表示 (r_{i+1}, θ_j) ; (3)表示 (r_i, θ_{j+1}) ; (4)表示 (r_{i+1}, θ_{j+1}) 。

图4 坐标转换示意图

4 实验结果与分析

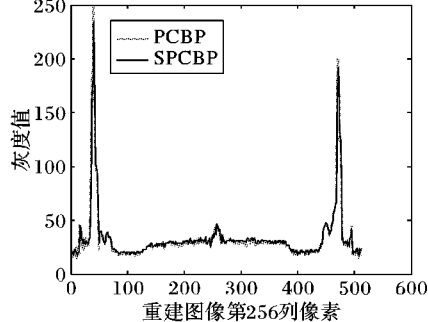
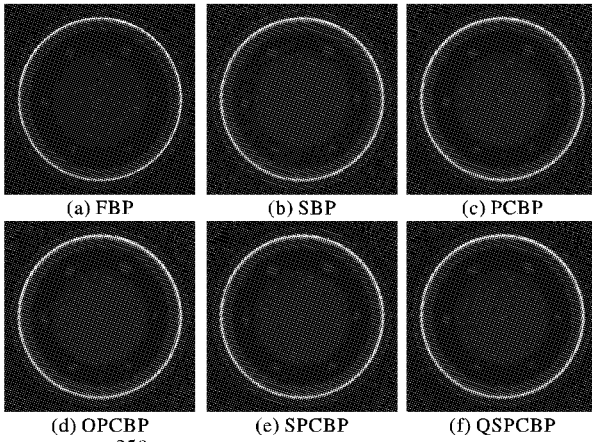
4.1 重建图像质量比较

为验证 SPCBP 算法, 本文使用的扫描工件为圆柱形, 采用实际投影数据进行图像重建, 其参数分别为射线源到工件中心距离 800 mm, 工件中心到探测器距离 150 mm, 探测器为 paxscan 2520, 探元大小 0.127 mm, 投影数据图像大小 460×570 , 中心坐标 (228, 285), 射线源 ISOVOLT 450, 电压 110 kV, 电流 2.5 mA。在酷睿 2 2.1 GHz, 2 GB 内存的 PC 上, 投影视图数 M 为 360 时, 分别用不同算法对 512×512 的图像进行重建(各算法均采用线性插值, VC++ 6.0 编程)。各种算法的重建图像如图 5 所示, 由于无原始图像, 根据文献[11]可知 PCBP 重建结果与 CBP 的相当, 所以只需 PCBP 与 SPCBP 重建结果。图 5(g) 是 PCBP 与 SPCBP 重建图像的 256 列数据的灰度值曲线比较, 用肉眼观察二者无明显区别。为进一步客观地评价重建精度, 采用信噪比 (Signal-to-Noise Ratio, SNR)^[13] 和均方根误差 (Mean Squared Root Error, MSRE)^[14] 进行分析比较。其中 SNR 和 MSRE 由式(7)和式(8)给出:

$$SNR = 10 \lg \left(\frac{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N t_{u,v}^2}{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N (t_{u,v} - r_{u,v})^2} \right) \quad (7)$$

$$MSRE = \frac{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N (t_{u,v} - r_{u,v})^2}{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N t_{u,v}^2} \quad (8)$$

其中: $t_{u,v}$ 、 $r_{u,v}$ 分别表示参考图像和重建后图像第 u 行、 v 列的像素。计算各种重建算法的 SNR 和 $MSRE$ 值如表 1 所示。通过数据对比说明应用 SPCBP 算法重建图像不会带来新的误差。



(g) PCBP与SPCBP算法重建图像256列像素比较

图 5 各种算法重建图像质量比较

4.2 重建图像速度比较

在 SPCBP 算法中,同时采用了坐标转换对称的方法,与传统卷积反投影重建算法相比,重建速度提高了 1.8 倍以上;同时使用查找表的 QSPCBP 算法,重建速度提高 10 倍,与其他算法相比提高速度效果明显。由于使用了坐标对称的方法,需要存储的信息减少到原来的 1/4,所以使用表的优点没有突出。

表 1 各种算法重建时间及质量比较

重建算法	重建时间/s	MSRE	SNR
CBP	11.258	—	—
SBP	4.375	0.025 8	15.889 2
PCBP	9.890	0.033 9	14.696 4
OPCBP	1.926	0.033 9	14.696 4
SPCBP	1.288	0.028 0	15.532 5
QSPCBP	1.088	0.028 0	15.532 4

5 结语

本文提出的 SPCBP 算法可以很大程度上提高重建速度,并且不引入新误差;另外这种优化方法也适用于三维锥束重建和多层螺旋三维重建;同时可结合其他加速技术如并行运算、单指令多数据流(Single Instruction Multiple Data, SIMD)指令、图形处理器(Graphics Processing Unit, GPU)加速、细胞宽带引擎(Cell Broadband Engine, CBE)加速技术等,进一步缩短重建时间。接下来的工作是把该方法运用到三维锥束重建中,并结合硬件加速技术对三维锥束算法进行优化。

参考文献:

[1] GUO J. Investigation of truncated projection data and contour char-

acteristic reconstruction algorithms of cone-beam industrial CT [D]. Chongqing: Chongqing University, 2011. (郭吉强. 锥束工业 CT 阶段投影数据重建和轮廓特征重建算法研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2011.)

[2] SHI H, LUO S. A novel scheme to design the filter for CT reconstruction using FBP algorithm [J]. BioMedical Engineering Online, 2013, 12(1): 1-15.

[3] FANG Z, GU X, ZHANG X, *et al.* Research on the relationship between projection number and image noise level in FBP reconstruction [J]. Advanced Materials Research, 2013, 718/719/720: 2324-2328.

[4] BILGOT A, DESBAT L, PERRIER V. FBP and the interior problem in 2D tomography [C]// Proceedings of the 2011 IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference. Piscataway: IEEE Press, 2011: 4080-4085.

[5] LIU Z, ZHANG L, HAO J. Radiation intensity image reconstruction in TGS using ART algorithm with geometrically-corrected system matrix and TV constraint [C]// Proceedings of the 2012 IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference. Piscataway: IEEE Press, 2012: 78-82.

[6] STEWART M, KAPPES D. SART for copper control in cyanide heap leaching [J]. Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy, 2012, 113(12): 1034-1043.

[7] WANG J, WANG H, YAN Y. Fast reconstruction of computerized tomography image based on the cross-entropy method [J]. Flow Measurement and Instrumentation, 2011, 22(4): 295-302.

[8] HASU S, BRESLER Y. $O(N^2 \log_2 N)$ filtered back projection reconstruction algorithm for tomography [J]. IEEE Transactions on Image processing, 2000, 9(10): 1760-1773.

[9] ZHANG Q, LU H, YANG M, *et al.* Fast reconstruction of fan-beam CT using symmetry backprojection and iterative technique [J]. Computerized Tomography Theory and Applications, 2004, 13(4): 16-19. (张全红, 路宏年, 杨民, 等. 用对称反投影及递归迭代实现扇束 CT 快速重建[J]. CT 理论与应用研究, 2004, 13(4): 16-19.)

[10] ZHANG C, GUO Z, DONG Y, *et al.* Fast reconstruction CT image by using geometric parameter table [J]. Journal of Tsinghua University: Science and Technology, 1998, 38(7): 47-49. (张朝宗, 郭志平, 董宇峰, 等. 用几何参数表方法实现快速重建 CT 图像[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 1998, 38(7): 47-49.)

[11] YANG M, LU H, HUANG C. Fast computed tomography reconstruction with look-up table and polar coordinate back-projection [J]. Acat Armamentarii, 2004, 25(4): 476-479. (杨民, 路宏年, 黄朝志. 用查找表和极坐标反投影法实现计算机断层扫描快速重建[J]. 兵工学报, 2004, 25(4): 476-479.)

[12] ZHANG L, GUI Z. Speed optimization of polar coordinate back-projection reconstruction algorithm for fan beam collinear equispaced CT [J]. Nondestructive Testing, 2010, 32(2): 95-98. (张奎, 桂志国. 扇束等距 CT 极坐标反投影重建算法的速度优化[J]. 无损检测, 2010, 32(2): 95-98.)

[13] ZOU X. Scan mode and reconstruction algorithm of large field of view in helical industrial cone-beam CT [D]. Chongqing: Chongqing University, 2010. (邹晓兵. 大视场螺旋锥束工业 CT 的扫描方法与重建算法研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2010.)

[14] LIU C, HUANG X H, WANG M. Fast computation of Zemike moments in polar coordinates [J]. IET Image Processing, 2012, 6(7): 996-1004.