

# 基于熵的赋权网络抗毁性评估方法

赵静娴\*

(天津科技大学 经济与管理学院, 天津 300222)

(\*通信作者电子邮箱 nzjx2005@163.com)

**摘要:** 为了研究赋权网络在遭到局部破坏后, 网络性能保持稳定的抗毁能力, 通过计算节点间不重叠路径对流量的贡献度, 进而引入熵的概念, 将网络拓扑结构的连通稳定性与网络承载流量的稳定性相结合, 以全连通网为基准, 提出了用于评估节点间抗毁性的标准稳定熵指标, 并在此基础上给出了用于全网抗毁性评估的模型。仿真实验表明网络的抗毁性不仅与网络的拓扑结构、各边权重所代表的边容量总和有关, 同时也与各边权重的均匀度有关; 关键边性能权重分布越均匀的网络, 其整体抗毁性能越强。

**关键词:** 抗毁性; 赋权; 网络; 熵; 不重叠路径

**中图分类号:** TN915.02      **文献标志码:** A

## Entropy-based evaluation method of weighted network invulnerability

ZHAO Jingxian \*

(School of Economics and Management, Tianjin University of Science and Technology, Tianjin 300222, China)

**Abstract:** In order to study the invulnerability of weighted network after being partially destroyed, combining the stability of network topology structure and the network flow by calculating the contribution degree to flow by nonoverlapping path between nodes and adopting entropy concept, a standard stability entropy index was proposed to evaluate the invulnerability between nodes in fully-connected network as a reference. On this basis, a model to evaluate the whole network invulnerability was given. The simulation results show that network invulnerability not only relates to network topology and the capacity sum of all edge weights, but also relates to the uniformity of all edge weights. The more uniform the critical edge weights are, the more strong the overall invulnerability is.

**Key words:** invulnerability; weighting; network; entropy; nonoverlapping

## 0 引言

人类社会网络化进程不断发展, 通信网络、电力网络、物流网络、交通网络等网络无处不在。在复杂网络的研究中, 网络的抗毁性一直是研究的热点问题<sup>[1-2]</sup>。Frank 等<sup>[3]</sup>最早提出连通度的概念; Goddard<sup>[4]</sup>、Wei 等<sup>[5]</sup>用完整度研究网络的抗毁性; 郭伟<sup>[6]</sup>用跳面节点法来度量网络的可靠性; Schroeder 等<sup>[7]</sup>提出了基于熵的网络抗毁性评估方法; Nardelli 等<sup>[8]</sup>、任俊亮等<sup>[9]</sup>、饶育萍等<sup>[10]</sup>分别利用最短路径法研究了网络的抗毁性; 程克勤等<sup>[11]</sup>、马润年等<sup>[12]</sup>进一步对链路赋权网络进行了抗毁性研究。这些方法各有侧重, 但都是以拓扑结构的连通性为标准对网络的抗毁性进行评估。然而在现实中, 除了由于网络局部遭到破坏而使网络整体连通性失效的极端情况, 由于网络局部失效而引起网络流性能下降的情况更为普遍, 也更具有实际意义。也就是说当网络遭到自然或人为的突发事件破坏时, 网络的连通性完好并不意味着网络流的性能没有受到影响。由此可见, 在网络的抗毁性研究中, 不仅要考虑网络在遭到破坏时节点间依然保持连通的能力, 同时还要考虑节点间各种传输性能的稳定性。因此本文以流量为例, 将网络拓扑结构的连通性能与网络承载流量的稳定性相结合, 提出一种基于熵的赋权网络抗毁性评估方法。

## 1 基本定义

### 1.1 赋权网络

在实际网络中最常遇到的流量问题为例, 给出赋权网络的定义:

无向连通图  $G = (V, E, A)$ , 其中:  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$  为节点集合;  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_M\}$  为边集合;  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_M\}$  为各条边的权重集合, 权重  $a_i$  代表边  $e_i$  的某种可量化的性能, 如距离、容量等, 本文中规定  $a_i \geq 0$ , 表示边  $e_i$  的容量。

### 1.2 不重叠路径数

两条链路  $P$  和  $Q$  中, 如果不含有任何相同的边, 则称  $P$ 、 $Q$  为不重叠路径。将节点  $v_i$  和  $v_j$  之间不重叠的路径数记为  $k_{ij}$ 。

在网络的抗毁性研究中, 不重叠路径数具有十分重要的意义。因为节点间的不重叠路径越多, 当网络遭到破坏, 某些条路径断裂时, 节点间通过其他路径保持连通的可能性越大。这里需要强调的是不重叠。以图 1 为例, 虽然节点  $v_1$  到  $v_2$  共有 4 条路径:  $v_1 - v_2$ ;  $v_1 - v_6 - v_2$ ;  $v_1 - v_6 - v_5 - v_3 - v_2$ ;  $v_1 - v_6 - v_5 - v_4 - v_3 - v_2$ , 但由于后 3 条路径中含有相同的边  $v_1 - v_6$ , 所以一旦边  $v_1 - v_6$  断裂, 后 3 条路径将同时失效。因此应将这三者视为同一条路径。

网络中任意节点间的不重叠路径数可通过寻找单位容量下节点间的最小截边集求得。图 1 中节点  $v_1$  和  $v_2$  间的最小

收稿日期: 2014-04-14; 修回日期: 2014-05-29。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71071111); 天津市哲学社会科学规划项目(TJGL12-101)。

作者简介: 赵静娴(1981-), 女, 天津人, 讲师, 博士, 主要研究方向: 数据挖掘、金融工程。

截边集为:  $v_1-v_2, v_1-v_6, k_{ij} = 2$ 。

### 1.3 节点间的最大流

以最大容量作为性能的代表,确定各条边的权重,赋权后的网络如图2所示。用标号法<sup>[13]</sup>可求得各节点间的最大流量  $f_{\max}(v_i, v_j)$ 。例如,  $v_1, v_2$  间的最大流量  $f_{\max}(v_1, v_2) = 5$ 。

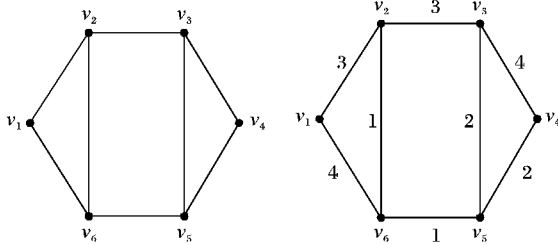


图1 6节点8边的无向图

图2 6节点8边的赋权图

## 2 赋权网络抗毁性评价模型

熵的概念最早是由物理学家 Rudolf Clausius 在 1850 年提出的,用于描述系统能量在空间中分布的均匀程度。能量分布越均匀,熵取值越大;反之,熵越小。而在网络节点间流体传输的过程中,承担传输任务的路径越多,且各路径所分担的传输量越均匀,在网络局部遭到破坏时,网络能够保持较大传输流量的概率越大,网络的抗毁性亦更强。因此本文引入熵的概念,提出基于熵的网络抗毁性评估方法。

### 2.1 节点间抗毁性指标

在赋权网络中,切断节点  $v_i$  和  $v_j$  间最小割边集中的边  $e_t$ , 计算  $e_t$  失效后,节点  $v_i$  和  $v_j$  间的最大流  $f_{\max}^t(v_i, v_j)$ , 显然  $f_{\max}(v_i, v_j) \geq f_{\max}^t(v_i, v_j)$ ,  $f_{\max}(v_i, v_j) - f_{\max}^t(v_i, v_j)$  为切断  $e_t$  后,使节点间减少的流量,也即第  $t$  条不重叠路径对节点间流量的贡献度。因此可以得到第  $t$  条不重叠路径对节点间流量的贡献度  $p_t$  的计算公式如下:

$$p_t = \frac{f_{\max}(v_i, v_j) - f_{\max}^t(v_i, v_j)}{f_{\max}(v_i, v_j)}; t = 1, 2, \dots, k_{ij} \quad (1)$$

且有  $\sum_{t=1}^{k_{ij}} p_t = 1$ 。

对于节点间最小割边集不唯一的情况,需要将  $h$  组最小割边集分别按照上面的步骤计算  $p_t$  及  $E_x(v_i, v_j)$  ( $x = 1, 2, \dots, h$ ),  $E_x(v_i, v_j)$  为按照第  $x$  组最小割边集计算得到的节点间的抗毁熵,再取  $E(v_i, v_j) = \min E_x(v_i, v_j)$ 。

**定义1** 在赋权网络中,将节点  $v_i$  和  $v_j$  之间的稳定熵记作:

$$E(v_i, v_j) = - \sum_{t=1}^{k_{ij}} p_t \lg(p_t) \quad (2)$$

其中:  $p_t$  为  $v_i$  和  $v_j$  之间的第  $t$  条不重叠路径对  $v_i$  和  $v_j$  之间流量的贡献度;  $k_{ij}$  是  $v_i$  和  $v_j$  之间的不重叠路径数,也即  $v_i$  和  $v_j$  之间最小割边集所包含的边数。

节点间抗毁熵  $E(v_i, v_j)$  可用来度量节点间的抗毁性。 $E(v_i, v_j)$  取值越大,说明节点  $v_i$  与  $v_j$  间的抗毁性越强,当网络遭到局部破坏,节点间能继续完成的传输流量越大。

全连通网任意节点间都存在直达通路,是公认的结构最为稳定的网络。根据熵的内涵,易知在赋权网络中,各边权重相同的全连通网是性能最为稳定,抗毁性最强的。含有  $N$  个节点的全连通网,任意节点间的不重叠路径数为  $N-1$ 。由于各边权重相同,所以  $p_t = (N-1)^{-1}$ ,

$$E(v_i, v_j) = - \sum_{t=1}^{N-1} (N-1)^{-1} \lg(N-1)^{-1} = \lg(N-1)$$

取到最大值。为了比较不同网络节点对之间的稳定性,以全连通网为标准,给出标准稳定熵的概念。

**定义2** 在  $N$  节点赋权网络中,节点  $v_i$  和  $v_j$  之间的标准稳定熵为:

$$\bar{E}(v_i, v_j) = \left[ - \sum_{t=1}^{k_{ij}} p_t \lg(p_t) \right] / [\lg(N-1)] \quad (3)$$

显然,  $0 \leq \bar{E}(v_i, v_j) \leq 1$ , 当  $v_i$  与  $v_j$  之间存在  $N-1$  条不重叠路径,且各条路径对该两点间流量的贡献度完全相同时,  $\bar{E}(v_i, v_j) = 1$ 。如果任意  $v_i, v_j$  均有  $\bar{E}(v_i, v_j) = 1$ , 则该网络为各边权重相同的全连通网。

### 2.2 全网抗毁性指标

**定义3**  $N$  节点赋权网络的全网稳定熵为:

$$E(G) = \left[ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \bar{E}(v_i, v_j) \right] / [N(N-1)/2] \quad (4)$$

其中:分母是  $N$  节点网络的节点对总数,分子是所有节点对的标准稳定熵加和。因此,全网稳定熵实际上就是所以节点对的平均标准稳定熵。 $0 \leq E(G) \leq 1$ ,  $E(G)$  取值越大,网络的整体抗毁性、流量稳定性越强。

## 3 样例分析

图3给出两个结构完全相同、权重略有不同的网络图  $G_1$  和  $G_2$ , 然后利用本文方法比较两个网络的抗毁性。

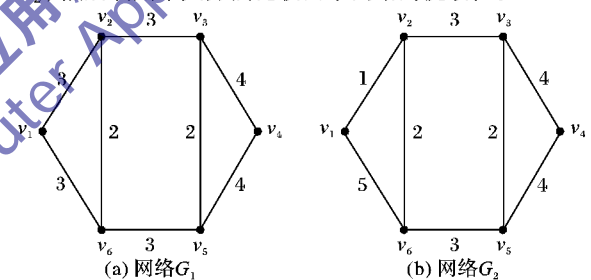


图3 赋权网络拓扑图

依次计算两个网络中所有节点对的不重叠路径数  $k_{ij}$ , 最大流  $f_{\max}(v_i, v_j)$ , 去掉最小割边集中各条边  $e_t$  后的最大流  $f_{\max}^t(v_i, v_j)$  ( $t = 1, 2, \dots, k_{ij}$ ), 再根据式(1)~(3)计算各节点间的标准稳定熵  $\bar{E}(v_i, v_j)$ , 结果见表1和表2。

表1 网络  $G_1$  中节点对的抗毁性指标

节点对	$k_{ij}$	$f_{\max}$	$f_{\max}^t$	$\bar{E}(v_i, v_j)$	节点对	$k_{ij}$	$f_{\max}$	$f_{\max}^t$	$\bar{E}(v_i, v_j)$
$(v_1, v_2)$	2	6	3,3	0.431	$(v_2, v_6)$	2	6	3,3	0.431
$(v_1, v_3)$	2	6	3,3	0.431	$(v_3, v_4)$	2	6	3,3	0.431
$(v_1, v_4)$	2	6	3,3	0.431	$(v_3, v_5)$	2	6	3,3	0.431
$(v_1, v_5)$	2	6	3,3	0.431	$(v_3, v_6)$	2	6	3,3	0.431
$(v_1, v_6)$	2	6	3,3	0.431	$(v_4, v_5)$	3	9	4,3,2	0.654
$(v_2, v_3)$	3	8	3,2,3	0.673	$(v_4, v_6)$	2	8	4,4	0.431
$(v_2, v_4)$	2	6	3,3	0.431	$(v_5, v_6)$	2	8	4,4	0.431
$(v_2, v_5)$	2	6	3,3	0.431					

然后利用式(4)分别计算  $G_1, G_2$  的全网稳定熵, 结果为:

$$\bar{E}(G_1) = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^5 \sum_{j=21}^6 \bar{E}(v_i, v_j) = 6.93/15 = 0.462$$

$$\bar{E}(G_2) = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^5 \sum_{j=21}^6 \bar{E}(i, j) = 6.13/15 = 0.409$$

$\bar{E}(G_1) > \bar{E}(G_2)$ 。可见,虽然  $G_1, G_2$  的网络的网络结构完全一致,各边权重所代表的边容量总和也相同,但在抗毁性上依然

有明显差别。原因就在于网络  $G_1$  中关键边的容量分布更为均匀。以节点对  $v_1, v_6$  为例,虽然在两个网络中连接其的不重叠路径数均为2,最大流也均为6,但在  $G_2$  中不重叠路径  $v_1-v_2$  和  $v_1-v_6$  分别承担的流量为1和5,不如  $G_1$  中的3,3均分更加稳定。

表2 网络  $G_2$  节点对的抗毁性指标

节点对	$k_{ij}$	$f_{\max}$	$f_i$	$\bar{E}(v_i, v_j)$	节点对	$k_{ij}$	$f_{\max}$	$f_i$	$\bar{E}(v_i, v_j)$
$(v_1, v_2)$	2	6	1,5	0.280	$(v_2, v_6)$	2	6	3,3	0.431
$(v_1, v_3)$	2	6	3,3	0.280	$(v_3, v_4)$	2	6	3,3	0.431
$(v_1, v_4)$	2	6	3,3	0.280	$(v_3, v_5)$	2	6	3,3	0.431
$(v_1, v_5)$	2	6	3,3	0.280	$(v_3, v_6)$	2	6	3,3	0.431
$(v_1, v_6)$	2	6	3,3	0.280	$(v_4, v_5)$	3	9	4,3,2	0.654
$(v_2, v_3)$	3	8	3,2,1	0.628	$(v_4, v_6)$	2	8	4,4	0.431
$(v_2, v_4)$	2	6	3,3	0.431	$(v_5, v_6)$	2	8	4,4	0.431
$(v_2, v_5)$	2	6	3,3	0.431					

为了对本文方法的正确性加以验证,分别计算  $e_s (s = 1, 2, \dots, 8)$  断裂时,各节点对间的最大流量和  $\sum_{i=1}^5 \sum_{j=2}^6 f_{\max}^s(v_i, v_j)$ , 结果如表3所示。

表3 各节点对间最大流量和

断裂边	$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=2}^6 f_{\max}^s(v_i, v_j)$	断裂边	$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=2}^6 f_{\max}^s(v_i, v_j)$
	$G_1(6,8)$ $G_2(6,8)$		$G_1(6,8)$ $G_2(6,8)$
$(v_1, v_2)$	74 84	$(v_4, v_5)$	95 93
$(v_1, v_3)$	74 64	$(v_4, v_6)$	81 71
$(v_2, v_3)$	97 77	$(v_5, v_6)$	81 71
$(v_2, v_4)$	60 57	无	99 97
$(v_3, v_5)$	60 57		

假设网络中的8条边断裂失效的几率是均等的,分别计算  $G_1(6,8)$  和  $G_2(6,8)$  一条边断裂失效后,网络能够保持原网络流量的比例  $H(G_1)$ 、 $H(G_2)$ 。

$$H(G_1) = \frac{\sum_{s=1}^8 \sum_{i=1}^5 \sum_{j=2}^6 f_{\max}^s(v_i, v_j)}{\sum_{i=1}^5 \sum_{j=2}^6 f_{\max}(v_i, v_j)} = \frac{(74 + 74 + 97 + 60 + 60 + 95 + 81 + 81)/8}{99} \approx 79\%$$

$$H(G_2) = \frac{\sum_{s=1}^8 \sum_{i=1}^5 \sum_{j=2}^6 f_{\max}^s(v_i, v_j)}{\sum_{i=1}^5 \sum_{j=2}^6 f_{\max}(v_i, v_j)} = \frac{(84 + 64 + 77 + 57 + 57 + 93 + 71 + 71)/8}{97} \approx 74\%$$

$H(G_1) > H(G_2)$ ,说明网络  $G_1$  的稳定性强于  $G_2$ ,与通过计算全网稳定熵得出的结果  $\bar{E}(G_1) > \bar{E}(G_2)$  相吻合。这进一步验证了基于熵的赋权网络抗毁性评估方法的正确性。

#### 4 结语

网络的抗毁性不仅包括在遭到自然或人为的破坏后各节点保持连通的能力,还应该包括节点间性能指标保持稳定性的能力。本文以流量为例,通过计算节点间各不重叠路径对流量的贡献度,并引入热力学中熵的概念,将网络拓扑结构的

连通性能与网络承载流量的稳定性相结合,提出基于熵的赋权网络抗毁性评估方法。最后通过样例分析,对方法的准确性进行了验证。

#### 参考文献:

- [1] TAN Y, ZHAO J, WU J, *et al.* Review on the network reliability based on paths[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2012, 32(12): 2724–2730. (谭跃进, 赵娟, 吴俊, 等. 基于路径的网络可靠性研究综述[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(12): 2724–2730.)
- [2] LI H, DU J, PENG X, *et al.* Research on cascading invulnerability of community structure networks under intentional-attack[J]. Journal of Computer Applications, 2014, 34(4): 935–938. (李浩敏, 杜军, 彭兴钊, 等. 蓄意攻击下一类多社团网络级联抗毁性研究[J]. 计算机应用, 2014, 34(4): 935–938.)
- [3] FRANK H, FRISCH I T. Analysis and design of survivable networks[J]. IEEE Transactions on Communication Technology, 1970, 18(5): 501–519.
- [4] GODDARD W. Measures of vulnerability — the integrity family[J]. Networks, 1994, 24(4): 207–213.
- [5] WEI Z, ZHANG S. Vertex-neighbor-integrity of composition graphs of paths[J]. Ars Combinatoria, 2008, 86(6): 349–361.
- [6] GUO W. Reliability evaluation method of tactical communication network[J]. Acta Electronica Sinica, 2000, 28(1): 3–6. (郭伟. 野战地域通信网可靠性的评价方法[J]. 电子学报, 2000, 28(1): 3–6.)
- [7] SCHROEDER M A, NEWPORT K T. Tactical network survivability through connectivity optimization[C]// MILCOM 1987: Proceedings of the 1987 IEEE Military Communications Conference — Crisis Communications: the Promise and Reality. Piscataway: IEEE, 1987: 590–597.
- [8] NARDELLI E, PROIETTI G, WIDMAYER P. Finding the detourcritical edge of a shortest path between two nodes[J]. Information Processing Letters, 1998, 67(1): 51–54.
- [9] REN J, SHEN M, SHI X. A method of evaluating the invulnerability of communication networks structure[J]. Journal of Air Force Engineering University: Natural Science Edition, 2010, 11(1): 70–73. (任俊亮, 申卯兴, 史向峰. 通信网络抗毁性的评价方法[J]. 空军工程大学学报: 自然科学版, 2010, 11(1): 70–73.)
- [10] RAO Y, LIN J, HOU D. Evaluation method for network invulnerability based on shortest route number[J]. Journal on Communications, 2009, 30(4): 113–117. (饶育萍, 林竞羽, 侯德亭. 基于最短路经数的网络抗毁评价方法[J]. 通信学报, 2009, 30(4): 113–117.)
- [11] CHENG K, LI S, ZHOU J. Evaluation method for network invulnerability based on edge weight[J]. Computer Engineering and Applications, 2010, 46(35): 95–96. (程克勤, 李世伟, 周健. 基于边权值的网络抗毁性评估方法[J]. 计算机工程与应用, 2010, 46(35): 95–96.)
- [12] MA R, WEN G, SHAO M, *et al.* Evaluation method of the invulnerability of weighted network based on the measurements of invulnerability[J]. Application Research of Computers, 2013, 30(6): 1802–1804. (马润年, 文刚, 邵明志, 等. 基于抗毁性测度的赋权网络抗毁性评估方法[J]. 计算机应用研究, 2013, 30(6): 1802–1804.)
- [13] GAN Y. Operations research[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005: 196. (甘应爱. 运筹学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005: 196.)