

文章编号:1001-9081(2015)01-0179-04

doi:10.11772/j.issn.1001-9081.2015.01.0179

# 基于空间分解的参数优化径向基函数近似模型构造方法

吴宗渝\*, 罗文彩

(国防科学技术大学 高超声速冲压发动机技术重点实验室, 长沙 410073)

(\*通信作者电子邮箱 vjzwzy@163.com)

**摘要:**为了进一步提高径向基函数(RBF)近似模型的精度,对其近似精度影响因素进行了深入研究。深入分析了计算机舍入误差对RBF近似精度的影响,指出矩阵条件数和形状参数同为影响RBF模型近似精度的两个重要因素。结合灵敏度分析对设计空间进行了分解,改善了矩阵条件数,增加了设计自由度,在传统基于形状参数优化的RBF近似模型的基础上,提出了基于空间分解的参数优化RBF近似模型构造方法。数值实验结果表明,在两个测试算例中,所提方法较传统基于形状参数优化的RBF近似模型构造方法的均方根误差(RMSE)分别减小了51.3%、58.0%,具有更高的近似精度。

**关键词:**径向基函数;近似精度;条件数;参数优化;灵敏度分析

中图分类号: TP391.9 文献标志码:A

## Construction method of radial basis function approximation model based on parameter optimization of space decomposition

WU Zongyu\*, LUO Wencai

(Science and Technology on Scramjet Laboratory, National University of Defense Technology, Changsha Hunan 410073, China)

**Abstract:** To improve the accuracy of Radial Basis Function (RBF) approximation model, the influencing factors on approximation accuracy were deeply studied. The truth that matrix condition number and shape parameter were two important factors of approximation accuracy was pointed out by analyzing the influence of rounding error over approximation accuracy thoroughly. The matrix condition number was decreased and the design freedom was increased by separating design space based on sensitivity analysis. Learning from the traditional RBF based on optimal shape parameter, the construction method of RBF approximation model based on parameter optimization of space decomposition was proposed. The numerical test results show that, in the two cases, the Root Mean Square Error (RMSE) of the proposed method is reduced by 51.3% and 58.0% respectively while comparing with the traditional method based on optimal shape parameter for construction of RBF approximation model. The proposed method has high approximate accuracy.

**Key words:** Radial Basis Function (RBF); approximation accuracy; condition number; parameter optimization; sensitivity analysis

## 0 引言

针对复杂系统研究过程中各个学科之间相互耦合的问题,多学科优化设计(Multidisciplinary Design Optimization, MDO)采用各学科已发展成熟的精度高的分析模型,通过充分利用各个学科(子系统)之间的相互作用所产生的协同效应,各学科组并行设计,得出整体上的最优设计。但是高精度模型带来的庞大而复杂的计算是难以承受的<sup>[1-3]</sup>。近似模型是多学科优化的关键技术之一,通过少量的高精度分析和近似计算构造显式近似表达式来代替原有系统,是解决多学科优化计算复杂性的有效手段<sup>[4]</sup>。

目前常用的近似模型有多项式响应面模型、Kriging 模型、径向基函数(Radial Basis Function, RBF)模型、支持向量机模型、神经网络模型<sup>[5]</sup>。由于径向基模型具有形式简单、各向同性、设置参数少、易于处理等优点,对高维问题和非线性问题均具有较好的近似效果,得到了广泛的应用<sup>[6]</sup>。以径

向基近似模型为研究对象,对影响其近似精度的主要因素进行了分析,在传统基于形状参数优化的径向基模型的基础上<sup>[7]</sup>,结合灵敏度分析对设计空间进行分解,增加径向基模型的设计自由度,提出了基于空间分解的参数优化径向基近似模型构造方法。

## 1 径向基插值原理

径向基插值本质上是一种插值方法,通过插值基函数的线性组合构造径向基插值模型,表达式如下:

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^{N_s} w_i \varphi(\|x - x_i\|) \quad (1)$$

其中: $N_s$  为样本点个数, $w_i$  为权系数, $x_i$  为样本点, $\varphi(\|x - x_i\|)$  为径向基函数, $x$  为待估点, $\hat{y}$  为 $x$  点上的预估值。记权系数  $W = [w_1, w_2, \dots, w_{N_s}]^T$ , 基函数  $\varphi(x) = [\varphi(\|x - x_1\|), \varphi(\|x - x_2\|), \dots, \varphi(\|x - x_{N_s}\|)]^T$ , 则式(1) 可记为:

$$\hat{y} = W^T \cdot \varphi(x) \quad (2)$$

收稿日期:2014-08-12;修回日期:2014-09-23。

作者简介:吴宗渝(1991-),男,河南周口人,硕士研究生,主要研究方向:飞行器多学科优化设计; 罗文彩(1975-),男,湖南邵东人,副教授,博士,主要研究方向:飞行器总体设计、多学科优化设计。

权系数向量  $\mathbf{W}$  可以由式(3)确定:

$$\mathbf{W} = \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{Y} \quad (3)$$

其中  $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_{N_s}]^T$  为样本点上的真值, 矩阵  $\boldsymbol{\Phi}$  的表达式如下:

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \varphi(\|x_1 - x_1\|) & \varphi(\|x_1 - x_2\|) & \cdots & \varphi(\|x_1 - x_{N_s}\|) \\ \varphi(\|x_2 - x_1\|) & \varphi(\|x_2 - x_2\|) & \cdots & \varphi(\|x_2 - x_{N_s}\|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(\|x_{N_s} - x_1\|) & \varphi(\|x_{N_s} - x_2\|) & \cdots & \varphi(\|x_{N_s} - x_{N_s}\|) \end{pmatrix} \quad (4)$$

常用的径向基函数有薄板样条插值基函数、高斯插值基函数和复合二次曲面(Multi-Quadratics, MQ)插值基函数等, 其中二次 MQ 插值基函数因其收敛率高的特点得到了广泛的应用<sup>[8-9]</sup>。选择二次 MQ 插值基函数作为径向基函数, 把  $\|x - x_i\|$  记成欧氏空间距离  $r$ , 则插值基函数可表示为:

$$\varphi = \sqrt{r^2 + c^2} \quad (5)$$

其中  $c$  是常数, 由于其决定了插值基函数的形状特性, 故称其为形状参数。

## 2 径向基插值模型近似精度的影响因素

由式(2)可看出近似模型  $\hat{y}$  由两部分组成: 插值基函数和权系数。假设样本点已经确定, 则近似模型的精度由插值基函数和权系数共同决定。由插值基函数表达式(5)可知插值基函数的形状特性由形状参数决定, 如图 1 所示, 不同取值的形状参数对应不同形状的插值基函数。

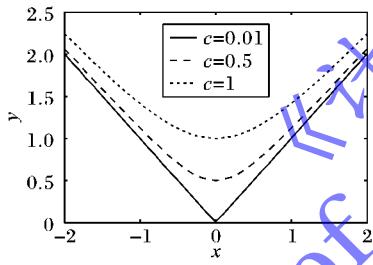


图 1 基函数形状与形状参数的关系

权系数由式(3)确定, 其中  $\mathbf{Y}$  为已知量, 矩阵  $\boldsymbol{\Phi}$  的表达式如式(3)所示, 可知矩阵  $\boldsymbol{\Phi}$  也是形状参数的函数。综上, 插值基函数和权系数均由形状参数决定, 所以当样本点确定后, 径向基近似模型的精度由形状参数决定。

均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE) 常用于误差统计, 而基于留一交叉验证法的均方根误差可在不增加验证样本点的情况下<sup>[10]</sup>, 用于模型的全局误差估计, 具体表达式如下:

$$RMSE = \sqrt{\left( \sum_{i=1}^{N_s} (y_i - \hat{y}_i)^2 \right) / N_s} \quad (6)$$

其中  $y_i$  为  $x_i$  上的实际响应值。RMSE 越小, 认为径向基模型近似精度越高; 反之, 近似精度越低。

由于在样本点确定的情况下, 径向基模型的近似精度由形状参数决定, RMSE 也就成了形状参数  $c$  的函数, 记为  $f(c)$ 。目前一些学者提出以 RMSE 作为目标函数, 对形状参数  $c$  进行优化, 寻找使 RMSE 取最小值时的  $c$ , 并构建径向基近似模型<sup>[11-13]</sup>。通常将这种方法称之为基于形状参数优化的径向基模型构造方法。

以  $f(x) = 1/(1+16x^2)$  为例, 在设计空间  $x \in [-1, 1]$  均匀选取 21 个样本点, 形状参数  $c = 1.5$ , 建立径向基近似模型如图 2(a)所示, 此时近似模型在真实函数附近震荡, 误差较大。采用上面提到的基于形状参数优化的径向基模型构造方法, 可得优化后的形状参数  $c = 0.2728$ , 结果如图 2(b)所示, 此时近似模型能与真实函数较好地吻合。可知, 形状参数的选取对近似精度有重要影响。

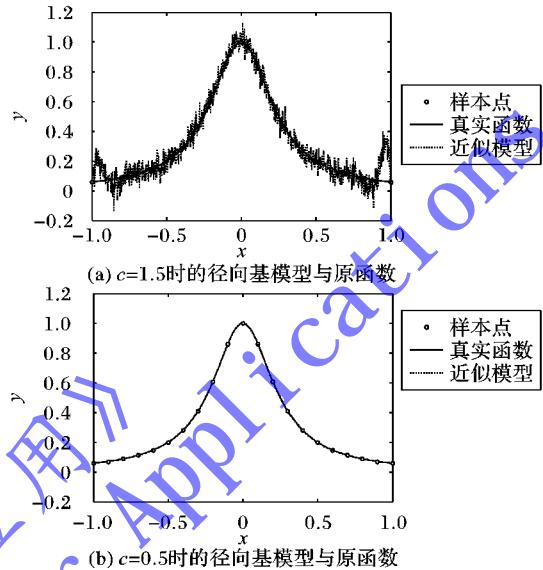


图 2 形状参数对径向基模型的影响

由于计算机存在舍入误差, 当  $\boldsymbol{\Phi}$  矩阵的条件数过大, 即矩阵呈现病态时, 微小的噪声即会引起权系数向量  $\mathbf{W}$  剧烈的震荡, 使径向基模型严重偏离真实函数, 存在较大误差。图 2(a)所示的径向基模型的  $\boldsymbol{\Phi}$  矩阵条件数  $COND = 4.8716 \times 10^{17}$ , 矩阵严重病态, 权系数向量  $\mathbf{W}$  有较大误差, 由图 2(a)可知对近似模型精度影响剧烈。若能改善  $\boldsymbol{\Phi}$  矩阵的条件数, 则可以一定程度上提高近似模型的精度。

矩阵的规模是影响矩阵条件数的其中一个因素, 矩阵规模过大, 往往会造成矩阵条件数增大。若能减小矩阵规模, 则可以减小矩阵条件数, 从而提高近似精度。

对于  $f(x) = 1/(1+16x^2)$ , 将设计空间  $x \in [-1, 1]$  均匀分解成两个子空间  $[-1, 0]、[0, 1]$ 。分别在两个子空间上构造径向基近似模型, 形状参数均取为 1.5, 结果如图 3 所示。由图 3(a)、(b)可知, 在两个子空间上近似模型均能与原函数很好地契合。此时两个子空间上的矩阵条件数分别为  $1.3705 \times 10^{15}、1.3726 \times 10^{15}$ , 相比  $4.8716 \times 10^{17}$  得到了有效改善。通过空间分解, 缩减  $\boldsymbol{\Phi}$  矩阵规模, 改善了矩阵条件数, 使径向基近似模型的近似精度大大提高。

综上, 当样本点确定以后, 近似模型的精度不仅由形状参数决定,  $\boldsymbol{\Phi}$  矩阵的条件数也是其重要因素。

## 3 基于灵敏度分析的空间分解法

将设计空间分解成一个个子空间, 在子空间上分别构造近似模型, 可以有效抑制  $\boldsymbol{\Phi}$  矩阵规模过大, 从而改善矩阵条件数。

通常, 对于一个维数为  $n$  设计空间, 进行空间分解的一个简单思路为: 将每一维均匀划分为  $m$  段, 进而得到  $m^n$  个子空间。这种方法简单易行, 但是会遇到一个严重的问题——维数

灾难,当设计空间的维数增加时,子空间的数量将按照指数增长。假设设计空间维数  $n = 20$ ,取  $m = 2$ ,此时设计空间被划分成  $m^n = 2^{20}$  个子空间,此时子空间的数量巨大,计算难以完成。

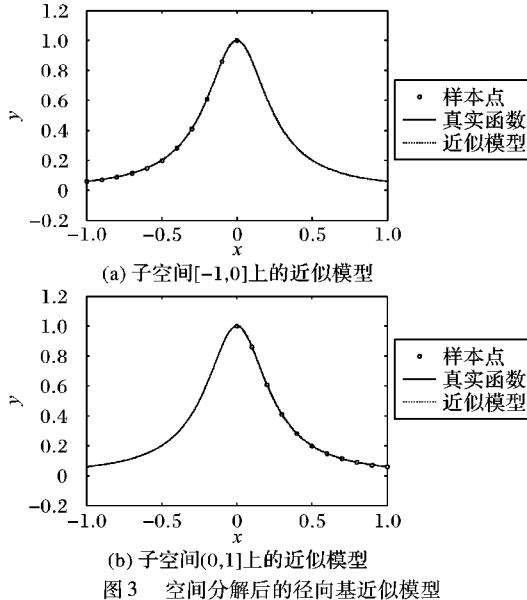


图3 空间分解后的径向基近似模型

敏感度分析是解决多学科优化设计复杂性问题的重要手段,是指对系统性能因设计变量或参数的变化显示出来的敏感程度的分析。基于敏感度分析,提出了一种实用的空间分解法,具体思路如下:首先,对设计空间中的  $n$  个维度分别进行敏感度分析,将各个维度按照敏感程度由高到低的顺序排列;其中敏感程度较高前  $k$  个维度对系统影响较大,认为在这些维度上系统变化剧烈,需要对这  $k$  个维度进行分解;敏感程度较低的维度对系统的影响较小,可以忽略不计,不需分解。对于维数  $n = 20$  的设计空间,对其进行敏感度分析,取  $k = 3$ , $m = 2$ ,此时设计空间分解被划分成  $m^k = 8$  个子空间,子空间数量相比之前大大减少。

#### 4 基于空间分解的参数优化径向基模型构造

为了充分提高径向基近似模型的近似精度,综合考虑形状参数以及矩阵条件数对近似精度的影响,提出了基于空间分解的参数优化径向基模型构造方法。其基本思想是通过将设计空间分解成多个子空间,以此改善  $\Phi$  矩阵条件数,并分别构造径向基近似模型;对各个子空间的形状参数进行优化,不同子空间可以采用不同的形状参数,增加了径向基近似模型的设计自由度。

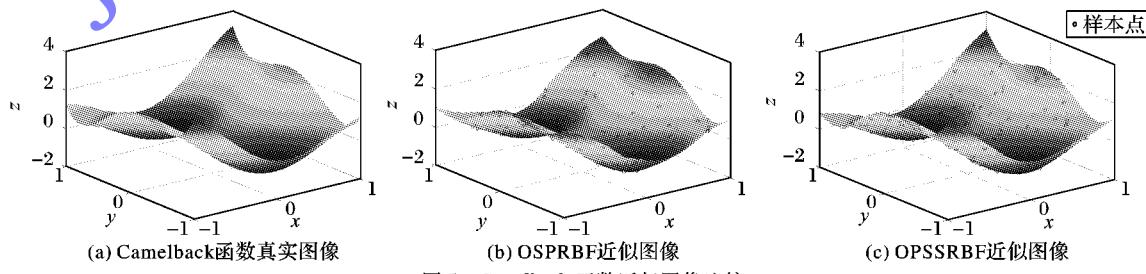


图5 Camelback 函数近似图像比较

由表1可知,OSPRBF 只有一个形状参数为 0.2373;OPSSRBF 在子空间 1 上的形状参数为 0.3189,子空间 2 上的形状参数为 0.1046,子空间 3 上的形状参数为 0.3305,子空

具体构造步骤如下:

- 1) 确定设计空间并采集样本点。首先采用拉丁超立方等实验设计方法在设计空间上生成样本点集  $X = [x_1, x_2, \dots, x_{N_s}]^T$ , 并计算其相应的响应值  $Y = [y_1, y_2, \dots, y_{N_s}]^T$ 。
- 2) 敏感度分析。维数为  $n$  的设计空间,对该系统进行敏感度分析,将各个维度按照敏感度从高到低的顺序进行排列。
- 3) 设计空间分解。选取敏感程度最高的前  $k$  个维度,在每一维上均分成  $m$  段,最终得  $m^k$  个子空间。
- 4) 构造子空间近似模型。分别在  $m^k$  个子空间上构建径向基近似模型。

5) 优化形状参数。采用遗传算法分别对  $m^k$  个子空间径向基近似模型的形状参数进行优化,求得各个子空间上的最优形状参数。

- 6) 组装近似模型。将各个子空间近似模型组装成一个完整的径向基近似模型。

流程如图4所示。

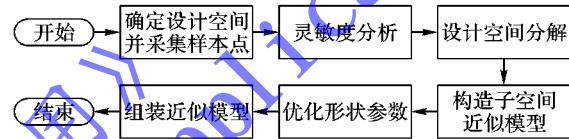


图4 基于空间分解的参数优化径向基近似模型构造流程

#### 5 函数测试

为了验证基于空间分解的参数优化径向基近似模型 (Optimal Parameter based on Space Separating for Radial Basis Function approximation modeling, OPSSRBF) 的有效性,选取了两个著名的测试函数对其进行了测试,并以均方根误差 RMSE 作为误差评判标准,与传统基于形状参数优化的径向基近似模型 (Optimal Shape Parameter for Radial Basis Function, OSPRBF) 进行了比较。

##### 5.1 二维测试函数(Camelback 函数)

$$f(x_1, x_2) = (4 - 2.1x_1^2 + x_1^4/3)x_1^2 + x_1x_2 + (4x_2^2 - 4)x_2^2; \\ x_1 \in [-1, 1], x_2 \in [-1, 1] \quad (7)$$

Camelback 函数的真实函数图像如图5(a)所示;在设计空间  $x_1 \in [-1, 1], x_2 \in [-1, 1]$  上采用最优拉丁超立方实验设计法采集 100 个样本点。首先采用传统基于形状参数优化的径向基模型构造方法对该函数进行近似,结果如图5(b)所示;然后采用基于空间分解的参数优化径向基近似模型对该函数进行近似,将设计空间平均分成 4 份,近似结果如图5(c)所示。

图4 上的形状参数为 0.0098,相比 OSPRBF 在参数调节上更加灵活。采用 OPSSRBF 得到的均方根误差  $RMSE = 0.0944$ ,而采用 OSPRBF 得到的均方根误差  $RMSE = 0.0460$ ,较

OPSSRBF 减小了 51.3%。

表 1 Camelback 函数近似结果比较

方法	子空间	形状参数	RMSE
OSPRBF	—	0.2373	0.0751
	1	0.3189	
OPSSRBF	2	0.1046	0.0607
	3	0.3305	
	4	0.0098	

## 5.2 7 维测试函数

$$f(x) = 0.7854x_1^2(3.3333x_3^2 + 14.9334x_3 - 43.0934) - 1.5079x_1(x_6^2 + x_7^2) + 7.477(x_6^3 + x_7^3) + 0.7854(x_4x_6^2 + x_5x_7^2); 1 \leq x_i \leq 5 \quad (8)$$

使用最优拉丁超立方实验设计法在设计空间上采集 300 个样本点。首先采用传统基于形状参数优化的径向基模型构造方法对该函数进行近似,结果如表 2 所示。然后采用基于空间分解的参数优化径向基近似模型对该函数进行近似:首先对该函数进行灵敏度分析,经归一化处理得到结果如图 6 所示。从图 6 中可知,设计变量  $x_2, x_3$  的敏感程度较其他变量更高,故将  $x_2, x_3$  这两个维度的变化区间均匀分成两段,最终将设计空间分解成 4 个子空间,结果如表 2 所示。

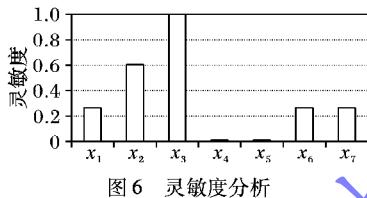


图 6 灵敏度分析

为了进一步验证 OPSSRBF 方法的有效性,凸显灵敏度分析对于空间分解的指导作用,除了上述空间分解方案外,又设计了两种分解设计空间的方案:

1) 将  $x_1, x_2, x_3$  这两个维度的变化区间均匀分成两段,最终将设计空间分解成 8 个子空间,近似结果如表 2 所示。

表 2 7 维函数近似结果比较

方法	子空间	形状参数	RMSE
OSPRBF	—	0.5774	231.5696
	1	0.2886	
OPSSRBF	2	0.5836	97.2409
	3	1.0060	
	4	0.0198	
	1	0.0143	
方案 1	2	0.2523	156.7392
	3	0.7149	
	4	2.3672	
	1	0.8474	
方案 2	2	0.5937	91.7760
	3	1.2831	
	4	0.9569	
	5	0.9340	
	6	0.0531	
	7	0.7229	
	8	0.6188	

2) 将  $x_1, x_4$  这两个维度的变化区间均匀分成两段,最终

将设计空间分解成 4 个子空间,近似结果如表 2 所示。

由表 2 可知,采用 OSPRBF 构造的径向基模型精度最低,均方根误差  $RMSE = 231.5696$ ,采用 OPSSRBF、方案 1、方案 2 构造的径向基模型精度均有所提高,均方根误差  $RMSE$  分别减小了 58.0%、32.3%、60.3%;其中:方案 1 未考虑各个变量对函数值的影响大小,构造的近似模型精度低于经过灵敏度分析的 OPSSRBF;方案 2 将设计空间分解成了 8 个子空间,近似精度略高于 OPSSRBF,但提高不多,而且 OPSSRBF 简单易行,具有更强的实用性。

## 6 结语

通过对径向基近似模型精度影响因素的深入分析,对如何改善  $\Phi$  矩阵条件数作了初步研究,在传统基于形状参数优化的径向基模型的基础上,结合基于灵敏度分析的空间分解法,提出了基于空间分解的参数优化径向基近似模型构造方法。得到结论如下:

- 1) 矩阵条件数和形状参数同为影响径向基模型近似精度的重要因素,当  $\Phi$  矩阵的条件数过大,即矩阵呈现病态时,微小的噪声即会引起权系数向量  $W$  剧烈的震荡,使径向基模型严重偏离真实函数。
- 2) 通过基于灵敏度分析的空间分解法将设计空间分解为多个子空间,可以有效改善矩阵  $\Phi$  的条件数,并且在各个子空间上采用不同的形状参数,增加了近似模型的设计自由度。
- 3) 数值实验表明,提出的基于空间分解的参数优化径向基近似模型相比传统基于形状参数优化的径向基近似模型具有更高的近似精度。

## 参考文献:

- [1] YAO W, CHEN X, LUO W, et al. Review of uncertainty-based multidisciplinary design optimization methods for aerospace vehicles [J]. Progress in Aerospace Sciences, 2011, 47(6): 450–479.
- [2] BALESSENT M, BÉRENDE N, DÉPINCE P, et al. A survey of multidisciplinary design optimization methods in launch vehicle design [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2012, 45(5): 619–642.
- [3] MARTINS J R R A, LAMBE A B. Multidisciplinary design optimization: a survey of architectures [J]. AIAA Journal, 2013, 51(9): 2049–2075.
- [4] DEB A, CHOU C C, DUTTA U, et al. Practical versus RSM-based MDO in vehicle body design [J]. SAE International Journal of Passenger Cars-Mechanical Systems, 2012, 5(1): 110–119.
- [5] QUEIPO N V, HAFTKA R T, SHYY W, et al. Surrogate based analysis and optimization [J]. Progress in Aerospace Sciences, 2005, 41(1): 1–28.
- [6] ALIPANAH A, ESMAEILI S. Numerical solution of the two-dimensional Fredholm integral equations using Gaussian radial basis function [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011, 235(18): 5342–5347.
- [7] DAVYDOV O, OANH D T. On the optimal shape parameter for Gaussian radial basis function finite difference approximation of the Poisson equation [J]. Computer and Mathematics with Applications, 2011, 62(5): 2143–2161.

(下转第 188 页)

## 4 结语

基于生物病毒机制和病毒感染操作,提出一种用于求解多维背包问题的改进二进制布谷鸟搜索算法。该算法将鸟巢位置所组成的主群体的纵向全局搜索和病毒群体的横向局部搜索动态结合,并利用病毒群体对主群体的感染操作和对病毒个体被选择感染的概率设定,较好地维持了主群体的种群多样性,推动了种群的演化,有效解决了布谷鸟搜索算法存在后期搜索速度慢、易陷入局部极值的缺点。最后与多种算法就多个不同规模的算例进行了仿真对比,表 1 中的计算结果显示所提的改进二进制布谷鸟搜索算法相对于量子遗传算法、二进制粒子群算法和二进制布谷鸟算法具有更好的求解精度和计算稳定性,是求解多维背包问题的一种有效方法。将来可将其应用于网络资源分配、投资决策等问题中。

### 参考文献:

- [1] DORIGO M, GAMBARDELLA L M. Ant colony system: a cooperative learning approach to the traveling salesman problem [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1997, 1(1): 53 – 66.
- [2] KARABOGA D, BASTURK B. A powerful and efficient algorithm for numerical function optimization: Artificial Bee Colony (ABC) algorithm [J]. Journal of Global Optimization, 2007, 39(3): 459 – 471.
- [3] YANG X, DEB S. Cuckoo search via Lévy flights [C]// Proceedings of the 2009 World Congress on Nature & Biologically Inspired Computing. Piscataway: IEEE, 2009: 210 – 214.
- [4] WU H, ZHANG F, WU L. New swarm intelligence algorithm—wolf pack algorithm [J]. Systems Engineering and Electronics, 2013, 35(11): 3430 – 3438. (吴虎胜, 张凤鸣, 吴庐山. 一种新的群体智能算法——狼群算法[J]. 系统工程与电子技术, 2013, 35(11): 3430 – 3438.)
- [5] LI Z, ZHANG X, ZHANG Z, et al. Monkey-king genetic algorithm hybridized with immune evolutionary [J]. Journal of Computer Applications, 2014, 34(6): 1641 – 1644. (李祚泳, 张小丽, 张正健, 等. 免疫进化混合猴王遗传算法[J]. 计算机应用, 2014, 34(6): 1641 – 1644.)
- [6] XIAO H, DUAN Y. Cuckoo search algorithm based on differential evolution [J]. Journal of Computer Applications, 2014, 34(6): 1631 – 1635. (肖辉辉, 段艳明. 基于差分进化的布谷鸟搜索算法 [J]. 计算机应用, 2014, 34(6): 1631 – 1635.)
- [7] VALIAN E, MOHANNA S, TAVAKOLI S. Improved cuckoo search algorithm for global optimization [J]. International Journal of Communications and Information Technology, 2011, 1(1): 31 – 44.
- [8] HU S, XU X, LI X. A virus coevolution genetic algorithm for project optimization scheduling [J]. Journal of Software, 2004, 15(1): 49 – 57. (胡仕成, 徐晓飞, 李向阳. 项目优化调度的病毒协同进化遗传算法[J]. 软件学报, 2004, 15(1): 49 – 57.)
- [9] GU F, CHEN H, LU B. Virus genetic algorithm for flexible job shop scheduling [J]. Systems Engineering and Electronics, 2005, 27(11): 1953 – 1956. (谷峰, 陈华平, 卢冰原. 病毒遗传算法在柔性工作车间调度中的应用[J]. 系统工程与电子技术, 2005, 27(11): 1953 – 1956.)
- [10] TUO S. A harmony search algorithm for resolving multi-dimensional knapsack problems [J]. Microelectronics & Computer, 2012, 29(6): 76 – 80. (拓守恒. 一种求解多维背包问题的和声优化搜索算法[J]. 微电子学与计算机, 2012, 29(6): 76 – 80.)
- [11] DEANE J, AGARWAL A. Neural, genetic, and neurogenetic approaches for solving the 0-1 multidimensional knapsack problem [J]. International Journal of Management & Information Systems, 2013, 17(1): 43 – 54.
- [12] PAVLYUKOVICH I. Lévy flights, non-local search and simulated annealing [J]. Journal of Computational Physics, 2007, 226(2): 1830 – 1844.
- [13] YANG X, DEB S. Engineering optimization by cuckoo search [J]. International Journal of Mathematical Modeling and Numerical Optimization, 2010, 1(4): 330 – 343.
- [14] VALIAN E, MOHANNA S, TAVAKOLI S. Improved cuckoo search algorithm for global optimization [J]. International Journal of Communications and Information Technology, 2011, 1(1): 31 – 44.
- [15] GHERBOUDJ A, LAYEB A, CHIKHI S. Solving 0-1 knapsack problems by a discrete binary version of cuckoo search algorithm [J]. International Journal of Bio-Inspired Computation, 2012, 4(4): 229 – 236.
- [16] HAN K-H, KIM J-H. Quantum genetic algorithm and its application to combinatorial optimization problem [C]// Proceedings of the 2000 Congress on Evolutionary Computation. Piscataway: IEEE, 2000: 1354 – 1360.

(上接第 182 页)

- [8] WANG L, WANG X, ZHAN H, et al. The error analysis of element-free method based on radial basis function used in mechanical problems [J]. Mechanics in Engineering, 2013, 35(2): 67 – 72. (王立鹏, 王欣彦, 战洪仁, 等. 基于径向基函数的无单元法求解力学问题误差分析[J]. 力学与实践, 2013, 35(2): 67 – 72.)
- [9] BAYONA V, MOSCOSO M, KINDELÁN M. Optimal variable shape parameter for multiquadric based RBF-FD method [J]. Journal of Computational Physics, 2012, 231(6): 2466 – 2481.
- [10] MAO W, MU X, ZHENG Y, et al. Leave-one-out cross-validation-based model selection for multi-output support vector machine [J]. Neural Computing and Applications, 2014, 24(2): 441 – 451.
- [11] BAYONA V, MOSCOSO M, KINDELÁN M. Optimal constant shape parameter for multiquadric based RBF-FD method [J]. Journal of Computational Physics, 2011, 230(19): 7384 – 7399.
- [12] XIANG S, WANG K, AI Y, et al. Trigonometric variable shape parameter and exponent strategy for generalized multiquadric radial basis function approximation [J]. Applied Mathematical Modelling, 2012, 36(5): 1931 – 1938.
- [13] ZHOU F, ZHANG J, SHENG X, et al. Shape variable radial basis function and its application in dual reciprocity boundary face method [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2011, 35(2): 244 – 252.