Journal of Computer Applications
计算机应用,2015,35(11):3208-3212
ISSN 1001-9081
CODEN JYIIDU
2015-11-10
http://www.joca.cn

文章编号:1001-9081(2015)11-3208-05
doi:10.11772/j.issn.1001-9081.2015.11.3208

覆盖族动态变化时粗集计算的矩阵方法

林艺东*,张燕兰,林梦雷
(闽南师范大学 计算机学院,福建 漳州 36300)
(*通信作者电子邮箱 linyidong1989@163.com)

摘 要:在覆盖信息系统中覆盖个数动态变化的背景下,针对如何有效、快速地计算集合的上、下近似集的问题,通过引入特征函数的概念,定义了一个关系矩阵,提出了集合的覆盖近似算子、正域、负域、边界域的矩阵表达式。其次,在覆盖信息系统中覆盖个数变化的条件下,利用矩阵方法研究和讨论了集合近似集的增量更新方法。这些结果丰富了覆盖粗糙集的动态知识更新理论,同时也为动态覆盖信息系统中知识更新提供了一种新的方法。

关键词:关系矩阵;覆盖信息系统;表达式;动态知识更新

中图分类号:TP3 **文献标志码**:A

Rough set based matrix method for dynamic change covering family

LIN Yidong*, ZHANG Yanlan, LIN Menglei
(*College of Computer, Minnan Normal University, Zhangzhou Fujian* 363000, *China*)

Abstract: To calculate upper and lower approximations effectively and quickly under covering variation in the covering information systems, a relation matrix was defined by using the concept of characteristic function. Then the expressions for the approximations, positive, boundary and negative regions intuitively from the view of matrix were presented. Then, the expressions for the approximations, positive boundary and negative regions intuitively from the view of matrix were put forward. Furthermore, the idea of matrix was used to research and discuss the approaches for incrementally updating approximations of sets, based on the dynamic number of coverings. The investigations enriched and improved the covering rough set based dynamic learning theory and provided a method for dynamic knowledge update based in covering information systems.

Key words: relation matrix; covering information system; expression; dynamic knowledge update

0 引言

粗糙集理论自20世纪80年代初由Pawlak[1]提出以来,发展十分迅速。它作为处理知识模糊性和不确定性的一种重要的数学工具,受到了越来越多研究人员的重视,已经在数据挖掘、机器学习、模式识别等领域得到了广泛应用。为了使粗糙集的应用范围更为广泛,人们提出了多种拓展模型[2-5],其中覆盖粗糙集[6-9]是粗糙集的重要推广之一。

在人类社会高度信息化的今天,数据具有动态变化的特征。在这个现实背景中,如何有效、快速地计算集合的上下近似进而获取动态知识以及知识约简是非常有意义有必要研究的一个课题。动态数据通常可分为3种类型[10]:1)属性不变,对象变化;2)对象不变,属性个数变化;3)对象和属性个数同时变化。显然,基于辨识矩阵的归纳学习算法和传统的启发式约简算法对这三类动态信息系统并不适用。为此,许多学者进行相关研究并取得一定的成果:Bazan等提出了动态约简的概念和方法,建立了动态约简、$(F-\lambda)$动态约简和广义动态约简的思想体系,为决策信息系统最稳定约简奠定了初步的理论基础[7];在动态属性环境中,文献[11]研究了集值信息系统,提出了用矩阵表示近似集的增量算法;文献[5]对文献[11]进行了深入研究,在对象动态变化的情况下探讨了混合关系粗糙集计算的矩阵方法,并给出了矩阵表示的增量算法;文献[12-14]基于不同信息系统相继提出了不同的增量算法。然而,人们却很少在动态环境中对覆盖信息系统进行相关研究。文献[7-9]提出的辨识矩阵显然无法直接应用于动态系统的约简,而传统的非增量约简算法对此也存在缺陷。由于矩阵具有表现形式直观、易于表示、计算和加速等特点,已被广泛应用于许多领域。因此,以矩阵为视角,研究动态覆盖信息系统的近似集的增量更新方法,从而为动态数据的知识获取提供新的方法,具有重要的理论价值和应用前景。

本文将基于覆盖诱导的二元关系定义为一个关系矩阵,研究集合的覆盖近似算子、正域、负域、边界域的矩阵计算式。进一步讨论覆盖信息系统中覆盖个数变化对关系矩阵的影响,并给出矩阵之间的关系式。

1 预备知识

设U是非空有限论域,其中$|U|=n$。

定义1[2] 给定论域U及其上的一个子集族C,若$\cup C=U$且$\forall K\in C$、$K\neq\varnothing$,则称C为U上的一个覆盖。

定义2[7] 设Δ是U上的覆盖族。对任意$x\in U,C\in\Delta$,令$C_x=\cap\{K\mid K\in C,x\in K\}$。任意$B\subseteq\Delta$,称$Cov(B)=\{B_x\mid x\in U\}$是由$B$诱导的$U$上的一个覆盖,其中$B_x=\cap\{C_x\mid C\in B\}$。

收稿日期:2015-06-09;**修回日期**:2015-07-03。 **基金项目**:国家自然科学基金资助项目(61379021);福建省科技厅计划项目(2015J05011,2013J01028,2013J01265,2012R0090);福建省教育厅计划项目(JK2014028,JA13198,JA14200)。

作者简介:林艺东(1989-),男,福建漳州人,硕士研究生,主要研究方向:粗糙集; 张燕兰(1983-),女,福建莆田人,讲师,博士,主要研究方向:粗糙集; 林梦雷(1963-),男,福建漳州人,教授,主要研究方向:模糊集、粗系统。

任意 $x \in U$，B_x 是 $Cov(B)$ 中包含 x 的最小集合，因此，$Cov(B)$ 中的任意元素都不能表示成其他若干元素之并。显然，$Cov(B) = B$ 当且仅当 B 是一个划分。此外，若 $y \in B_x$，则 $B_y \subseteq B_x$；若 $y \in B_x$ 且 $x \in B_y$，则 $B_x = B_y$。

定义 3[7]　设 (U,Δ) 是一个覆盖信息系统，$B \subseteq \Delta$。对于 $X \subseteq U$，X 关于覆盖 B 的下近似和上近似定义如下：

$$\underline{B}(X) = \{x \in U \mid B_x \subseteq X\}$$

$$\overline{B}(X) = \{x \in U \mid B_x \cap X \neq \varnothing\}$$

定义 2 提供了利用覆盖将论域粒化的方法，通过这种方法可以定义对象间的一个二元关系[4]，而 $Cov(B)$ 则是此二元关系的归类[8]。基于此观点，本文定义覆盖诱导的二元关系如下。

定义 4　设 (U,Δ) 是一个覆盖信息系统，$B \subseteq \Delta$。定义 U 上的一个二元关系 R_B 如下：$\forall x,y \in U$，$(x,y) \in R_B$ 当且仅当 $y \in B_x$。

命题 1　设 (U,Δ) 是一个覆盖信息系统。任意 $x \in U$，$B \subseteq \Delta$，则 $B_x = \{y \in U \mid (x,y) \in R_B\}$。

命题 2　设覆盖信息系统 (U,Δ) 中，$B \subseteq \Delta$，R_B 是 B 诱导的 U 上的二元关系。R_B 满足以下性质：

1）自反性。任意 $x \in U$，有 $(x,x) \in R_B$；

2）传递性。任意 $x,y,z \in U$，当 $(x,y) \in R_B$ 且 $(y,z) \in R_B$ 时，有 $(x,z) \in R_B$。

证明　1）显然满足自反性。

2）当 $(x,y) \in R_B$ 时，有 $y \in B_x$，则 $B_y \subseteq B_x$。同理，当 $(y,z) \in R_B$ 时，$B_z \subseteq B_y$。那么 $B_z \subseteq B_x$，于是 $(x,z) \in R_B$。

接下来，我们引入特征函数。

定义 5[15]　设 $U = \{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$X \subseteq U$，称 $\boldsymbol{G}(X) = (g_1,g_2,\cdots,g_n)^{\mathrm{T}}$ 为 X 的特征函数，其中：

$$g_i = \begin{cases} 1, & x_i \in X \\ 0, & x_i \notin X \end{cases}$$

例 1　设 $U = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$。若 $X = \{x_2\}$，则 $\boldsymbol{G}(X) = (0,1,0,0)^{\mathrm{T}}$。

2　覆盖信息系统的矩阵构建

本章将给出覆盖信息系统中上近似和下近似的矩阵表示。

定义 6　设 (U,Δ) 是一个覆盖信息系统。任意 $B \subseteq \Delta$，R_B 是覆盖 B 诱导的 U 上的关系。定义关系矩阵 $\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_B} = (\phi_{ij})_{n\times n}$，其中：$\forall x_i,x_j \in U$，

$$\phi_{ij} = \begin{cases} 1, & (x_i,x_j) \in R_B \\ 0, & (x_i,x_j) \notin R_B \end{cases}$$

事实上，关系矩阵 $\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_B} = (\phi_{ij})_{n\times n}$ 是二元关系 R_B 的一个等价刻画。由于 R_B 具有自反性，但不具有对称性，那么对于 $\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_B} = (\phi_{ij})_{n\times n}$，$\phi_{ii} = 1$ 且 $\phi_{ij} \neq \phi_{ji}(1 \leqslant i,j \leqslant n)$，因此关系矩阵 $\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_B}$ 不是对称矩阵。由定义 5 和定义 6 可知，对任意 $X \subseteq U$，$x_i \in U$，$|B_{x_i} \cap X| = (\phi_{i1},\phi_{i2},\cdots,\phi_{in})\boldsymbol{G}(X)$。

关系矩阵 $\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_B}$ 的元素本身反映了论域 U 中元素之间可分辨关系和不可分辨关系。$\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_B}$ 中，$\phi_{ij} = 1$ 表明论域中对象 x_i,x_j 不可分辨；$\phi_{ij} = 0$ 表明对象 x_i,x_j 可分辨。因此，$\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_B}$ 中元素之和就等于论域中关于 B 的所有不可分辨对象的总数。

定义 7[15]　设 $\boldsymbol{Y} = (y_{ij})_{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{Z} = (z_{ij})_{n\times n}$ 是两个矩阵，偏序关系"≤"和"≥"定义分别如下：

1）偏序关系"≤"。$\boldsymbol{Y} \leqslant \boldsymbol{Z}$ 当且仅当 $y_{ij} \leqslant z_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n)$；

2）偏序关系"≥"。$\boldsymbol{Y} \geqslant \boldsymbol{Z}$ 当且仅当 $y_{ij} \geqslant z_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n)$；

3）$\min(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}) = (\min(y_{ij},z_{ij}))_{n\times n}$。

引理 1　设 (U,Δ) 是一个覆盖信息系统。对任意 C_1、$C_2 \in \Delta$，$R_{\{C_1,C_2\}}$、R_{C_1}、R_{C_2} 分别是由 $\{C_1,C_2\}$、C_1、C_2 诱导的 U 上的二元关系，那么 $\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_{\{C_1,C_2\}}} = \min\{\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_{C_1}},\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_{C_2}}\}$。

命题 3　设 $B \subseteq \Delta$，则 $\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_B} = \min\limits_{C\in B}\{\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_C}\}$。

该命题提供了一个计算覆盖子族诱导的关系矩阵的方法，本文通过具体实例说明。

例 2　设 $U = \{1,2,3,4,5\}$，$\Delta = \{C_1,C_2,C_3\}$ 是 U 的一族覆盖，其中：

$C_1 = \{\{1,2\},\{2,3\},\{4\},\{4,5\}\}$

$C_2 = \{\{1,2,3\},\{4,5\},\{1,5\}\}$

$C_3 = \{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$

那么

$R_{C_1} = \{\{1,2\},\{2\},\{2,3\},\{4\},\{4,5\}\}$

$R_{C_2} = \{\{1\},\{1,2,3\},\{4,5\},\{5\}\}$

$R_{C_3} = \{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$

则

$$\boldsymbol{M}_{5\times 5}^{R_{C_1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{5\times 5}^{R_{C_2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{5\times 5}^{R_{C_3}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

且 $\boldsymbol{M}_{5\times 5}^{R_\Delta} = \mathrm{diag}(1,1,1,1,1)$。容易验证得 $\boldsymbol{M}_{5\times 5}^{R_\Delta} = \min\{\boldsymbol{M}_{5\times 5}^{R_{C_1}},\boldsymbol{M}_{5\times 5}^{R_{C_2}},\boldsymbol{M}_{5\times 5}^{R_{C_3}}\}$。

定义 8　设 (U,Δ) 是一个覆盖信息系统，$B \subseteq \Delta$。称

$$\boldsymbol{\Lambda}_{n\times n}^{R_B} = \mathrm{diag}(1/\lambda_1,1/\lambda_2,\cdots,1/\lambda_n) = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n}\phi_{1j}},\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n}\phi_{2j}},\cdots,\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n}\phi_{nj}}\right)$$

为 $\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_B}$ 诱导的对角矩阵。

显然 $\boldsymbol{\Lambda}_{n\times n}^{R_B}$ 的逆矩阵

$$(\boldsymbol{\Lambda}_{n\times n}^{R_B})^{-1} = \mathrm{diag}\left(\sum_{j=1}^{n}\phi_{1j},\sum_{j=1}^{n}\phi_{2j},\cdots,\sum_{j=1}^{n}\phi_{nj}\right)$$

也为一对角矩阵，可以得到如下推论。

推论 1　$\boldsymbol{\Lambda}_{n\times n}^{R_B} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{|B_{x_1}|},\frac{1}{|B_{x_2}|},\cdots,\frac{1}{|B_{x_n}|}\right)$，其中 $1 \leqslant |B_{x_i}| \leqslant n$，$1 \leqslant i \leqslant n$。

例 3　在例 2 中，令 $B = \{C_1,C_2\}$，根据推论 1 可直接求得 $\boldsymbol{M}_{5\times 5}^{R_B}$，$\boldsymbol{\Lambda}_{5\times 5}^{R_B} = \mathrm{diag}(1,1,1/2,1,1)$。

因为任意 $x_i \in U(1 \leqslant i \leqslant n)$，都有 $|B_{x_i} \cap X| = (\phi_{i1},\phi_{i2},$

$\cdots,\phi_{in})\boldsymbol{G}(X)$，则当 $|B_{x_i}\cap X| = |B_{x_i}|$ 时，$x_i\in \underline{B}(X)$；当 $|B_{x_i}\cap X|\neq 0$ 时，$x_i\in \overline{B}(X)$。我们可以根据概率粗糙集的观点引入包含度。定义 $p_i = |B_{x_i}\cap X|/|B_{x_i}| = |B_{x_i}\cap X|/\lambda_i$ 为优势类 B_{x_i} 包含于 X 的程度，其中 $0\leqslant p_i\leqslant 1(1\leqslant i\leqslant n)$。显然，当 $p_i=1$ 时，$x_i\in\underline{B}(X)$；当 $p_i>0$ 时，$x_i\in\overline{B}(X)$。同时，这说明了上近似和下近似可由 $\boldsymbol{\Lambda}_{n\times n}^{R_B}(\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_B}\boldsymbol{G}(X))$ 诱导得到。

为了进一步用关系矩阵描述覆盖信息系统中下近似和上近似，本文引入 1 个 n 维列向量 $\boldsymbol{H}(X)=(h_i)_{n\times 1}(1\leqslant i\leqslant n)$，并利用 $\boldsymbol{H}(X)$ 定义四种不同类型的布尔矩阵[5]。

定义 9 设 $0\leqslant\mu\leqslant\nu\leqslant 1$，$\boldsymbol{H}(X)$ 的 4 种布尔矩阵 $\boldsymbol{H}^{[\mu,\nu]}(X),\boldsymbol{H}^{(\mu,\nu]}(X),\boldsymbol{H}^{[\mu,\nu)}(X),\boldsymbol{H}^{(\mu,\nu)}(X)$ 分别定义如下：

1) $\boldsymbol{H}^{[\mu,\nu]}(X) = (h'_i)_{n\times 1}, h'_i = \begin{cases}1, & \mu\leqslant h_i\leqslant\nu\\ 0, & 其他\end{cases}$；

2) $\boldsymbol{H}^{(\mu,\nu]}(X) = (h'_i)_{n\times 1}, h'_i = \begin{cases}1, & \mu< h_i\leqslant\nu\\ 0, & 其他\end{cases}$；

3) $\boldsymbol{H}^{[\mu,\nu)}(X) = (h'_i)_{n\times 1}, h'_i = \begin{cases}1, & \mu\leqslant h_i<\nu\\ 0, & 其他\end{cases}$；

4) $\boldsymbol{H}^{(\mu,\nu)}(X) = (h'_i)_{n\times 1}, h'_i = \begin{cases}1, & \mu< h_i<\nu\\ 0, & 其他\end{cases}$。

不妨设 $\boldsymbol{P}(X)=(p_i)_{n\times 1}$，其中 $p_i=|B_{x_i}\cap X|/\lambda_i$，即 $p_i=(\phi_{i1},\phi_{i2},\cdots,\phi_{in})G(X)/\lambda_i$。于是，$\boldsymbol{P}(X)=\boldsymbol{\Lambda}_{n\times n}^{R_B}(\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_B}\boldsymbol{G}(X))$。根据定义 9，本文可以得到如下命题：

命题 4 设 (U,Δ) 是一个覆盖信息系统，$B\subseteq\Delta$。对任意 $X\subseteq U$，下近似 $\underline{B}(X)$ 和上近似 $\overline{B}(X)$ 的 n 维布尔矩阵 $\boldsymbol{G}(\underline{B}(X))$ 和 $\boldsymbol{G}(\overline{B}(X))$ 分别如下：

$$\boldsymbol{G}(\underline{B}(X)) = \boldsymbol{P}^{[1,1]}(X)$$
$$\boldsymbol{G}(\overline{B}(X)) = \boldsymbol{P}^{(0,1]}(X)$$

证明 这里只给出 $\boldsymbol{G}(\underline{B}(X)) = \boldsymbol{P}^{[1,1]}(X)$ 的证明过程。分别设 $\boldsymbol{G}(X)=(g_1,g_2,\cdots,g_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{G}(\underline{B}(X))=(g_1',g_2',\cdots,g_n')^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{P}^{[1,1]}(X)=(p_1',p_2',\cdots,p_n')^{\mathrm{T}}$。

1) $\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$，若 $p_i'=1$，根据定义 9 得 $p_i=1$，即

$$|B_{x_i}\cap X|/|B_{x_i}| = \sum_{j=1}^{n}\phi_{ij}g_j\Big/\sum_{j=1}^{n}{}_{ij} = p_i = 1$$

显然，$\forall j\in\{1,2,\cdots,n\}$，当 $\phi_{ij}=1$ 时，$g_j=1$。也就是说，$\forall x_j\in B_{x_i}$，都有 $x_j\in X$。于是 $B_{x_i}\subseteq X$，即 $x_i\in\underline{B}(X)$ 且 $g_i'=1$。若 $p_i'=0$，则 $g_i'\geqslant p_i'$。因此 $\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$，$g_i'\geqslant p_i'$。

2) $\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$，当 $g_i'=1$ 时，$x_i\in\underline{B}(X)$，那么 $B_{x_i}\subseteq X$，所以 $p_i=|B_{x_i}\cap X|/|B_{x_i}|=1$，则 $p_i'=1$。因此 $\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$，$g_i'\leqslant p_i'$。

综上，$g_i'=p_i'$，所以 $\boldsymbol{G}(\underline{B}(X))=\boldsymbol{P}^{[1,1]}(X)$。

从上述证明过程可知：当 U 中某元素所在的二元关系的归类包含于 X 时，该元素在集合 X 的下近似的布尔矩阵中对应行元素值才会等于 1；当该归类与 X 的交非空时，该元素在 X 的上近似的布尔矩阵中对应行元素值才会等于 1。

由于 $pos_B(X)=\underline{B}(X)$，$bn_B(X)=\overline{B}(X)-\underline{B}(X)$，$neg_B(X)=U-\overline{B}(X)$，同样地，也可以分别推出 $pos_B(X)$、$bn_B(X)$、$neg_B(X)$ 的 n 维布尔矩阵如下。

推论 2 设 (U,Δ) 是一个覆盖信息系统，$X\subseteq U$，$B\subseteq\Delta$，则 $G(pos_B(X)) = \boldsymbol{P}^{[1,1]}(X)$，$\boldsymbol{G}(bn_B(X))=\boldsymbol{P}^{(0,1)}(X)$，$\boldsymbol{G}(neg_B(X))=\boldsymbol{P}^{[0,0]}(X)$。

证明 与命题 4 的证明过程类似。

推论 3 设 (U,Δ) 是一个覆盖信息系统，$X\subseteq U$，$B\subseteq\Delta$，R_B 是覆盖子族 B 诱导的 U 上的二元关系。

本文定义 n 维列向量 $\boldsymbol{P}(X)=(p_i)_{n\times 1}$ 为：

$$\boldsymbol{P}(X) = \boldsymbol{\Lambda}_{n\times n}^{R_B}(\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_B}\boldsymbol{G}(X))$$

其中 $p_i=|B_{x_i}\cap X|/\lambda_i(1\leqslant i\leqslant n)$，那么 $\underline{B}(X)$、$\overline{B}(X)$、$pos_B(X)$、$bn_B(X)$ 以及 $neg_B(X)$ 均可由 $\boldsymbol{P}(X)$ 诱导得到。

下面例子是为了更好地解释命题 4。

例 4 参看例 3，令 $X=\{2,3,4\}$，则 $\boldsymbol{G}(X)=(0,1,1,1,0)^{\mathrm{T}}$。于是：

$$\boldsymbol{P}(X) = \boldsymbol{\Lambda}_{n\times n}^{R_B}(\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_B}\boldsymbol{G}(X)) = (0,1,1/2,1/2,0)^{\mathrm{T}}$$

那么

$$\boldsymbol{G}(\underline{B}(X)) = \boldsymbol{P}^{[1,1]}(X) = (0,1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{G}(\overline{B}(X)) = \boldsymbol{P}^{(0,1]}(X) = (0,1,1,1,0)^{\mathrm{T}}$$

命题 5 设 $(U,\Delta\cup D)$ 是决策覆盖信息系统，D 是决策属性集，$U/D=\{D_1,D_2,\cdots,D_t\}$。任意 $D_j\in U/D(1\leqslant j\leqslant t)$，$B\subseteq\Delta$，$R_B$ 是 B 诱导的 U 上的二元关系，则：

$$\boldsymbol{G}(\underline{B}(D_j)) = \boldsymbol{P}^{[1,1]}(D_j)$$
$$\boldsymbol{G}(\overline{B}(D_j)) = \boldsymbol{P}^{(0,1]}(D_j)$$

D 相对 B 的正域为 $pos_B(D)=\bigcup_{D_j\in U/D}\underline{B}(D_j)$，则：

$$\boldsymbol{G}(pos_B(D)) = \sum_{j=1}^{t}\boldsymbol{P}^{[1,1]}(D_j)$$

证明 设 $X,Y\subseteq U$ 且 $X\cap Y=\varnothing$，$B\subseteq\Delta$，$P(X\cup Y)=(p_i)_{n\times 1}=\boldsymbol{\Lambda}_{n\times n}^{R_B}(\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_B}\boldsymbol{G}(X\cup Y))$。由于 $p_i=|B_{x_i}\cap(X\cup Y)|/\lambda_i(1\leqslant i\leqslant n)$，则 $p_i=|B_{x_i}\cap X|/\lambda_i+|B_{x_i}\cap Y|/\lambda_i$。

由 i 的任意性，得 $\boldsymbol{P}(X\cup Y)=\boldsymbol{P}(X)+\boldsymbol{P}(Y)$，那么

$$\boldsymbol{G}(pos_B(X\cup Y)) = \boldsymbol{P}^{[1,1]}(X\cup Y) = \boldsymbol{P}^{[1,1]}(X)+\boldsymbol{P}^{[1,1]}(Y)$$

根据数学归纳法可得：

$$\boldsymbol{G}(pos_B(D)) = \sum_{j=1}^{t}\boldsymbol{P}^{[1,1]}(D_j)$$

命题 6 设 $(U,\Delta\cup D)$ 是决策覆盖信息系统，$B\subseteq\Delta$，R_B 是 B 诱导的 U 上的二元关系，那么：

$$\boldsymbol{G}(bn_B(D)) = \sum_{j=1}^{t}\boldsymbol{P}^{(0,1]}(D_j) - \sum_{j=1}^{t}\boldsymbol{P}^{[1,1]}(D_j) = \sum_{j=1}^{t}\boldsymbol{P}^{(0,1)}(D_j)$$

$$\boldsymbol{G}(neg_B(D)) = \boldsymbol{G}(U) - \sum_{j=1}^{t}\boldsymbol{P}^{(0,1]}(D_j) = \left(\sum_{j=1}^{t}\boldsymbol{P}^{(0,1]}(D_j)\right)^{[0,0]}$$

证明 与命题 5 类似。

可以看出：当 U 中某元素所在的决策类包含于 X 中时，该元素在集合 X 的下近似的布尔矩阵中对应行元素值等于 1；当该元素所在的决策类与 X 的交非空时，该元素在 X 的上近似的布尔矩阵中对应行元素值等于 1。

例 5 设 $U=\{x_i\mid i=1,2,\cdots,6\}$，$\Delta=\{C_1,C_2,C_3,C_4\}$，$D$ 是决策属性集。表 1 给出了 $C_i(i=1,2,\cdots,6)$ 诱导的优势类及等价类 $[x_i]_D$。

可得关系矩阵如下：

$$\boldsymbol{M}_{6\times 6}^{R_{C_1}} = \begin{bmatrix}1&1&0&1&1&0\\0&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\1&1&0&1&1&0\\0&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$M_{6\times6}^{R_{C_2}}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$M_{6\times6}^{R_{C_3}}=\begin{bmatrix}1&1&0&1&1&0\\0&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$M_{6\times6}^{R_{C_4}}=\begin{bmatrix}1&1&0&1&1&0\\0&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

设 $B=\{C_2,C_4\},D_1=\{x_1,x_2,x_3\},D_2=\{x_4,x_5,x_6\}$。通过计算可得：

$$\boldsymbol{P}(D_1)=\boldsymbol{\Lambda}_{6\times6}^{R_B}(\boldsymbol{M}_{6\times6}^{R_B}\boldsymbol{G}(D_1))=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{2}{3},0,0,0\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{P}(D_2)=\boldsymbol{\Lambda}_{6\times6}^{R_B}(\boldsymbol{M}_{6\times6}^{R_B}\boldsymbol{G}(D_2))=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3},1,1,1\right)^{\mathrm{T}}$$

由定义 9 可得：

$\boldsymbol{P}^{[1,1]}(D_1)=(0,0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{P}^{(0,1]}(D_1)=(1,1,1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{P}^{(0,1)}(D_1)=(1,1,1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{P}^{[1,1]}(D_2)=(0,0,0,1,1,1)^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{P}^{(0,1]}(D_2)=(1,1,1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{P}^{(0,1)}(D_2)=(1,1,1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$

于是根据命题 5、命题 6 可得表 2。根据表 2 可得：

$\underline{B}(D_1)=\varnothing$，$\underline{B}(D_2)=\{x_4,x_5,x_6\}$，$\overline{B}(D_1)=\{x_1,x_2,x_3\}$，$\overline{B}(D_2)=U$，$pos_B(D)=\{x_4,x_5,x_6\}$，$neg_B(D)=\varnothing$，$bn_B(D)=\{x_1,x_2,x_3\}$。

表 1　例 5 由不同覆盖诱导的优势类及决策类

x_i	$(C_1)_{x_i}$	$(C_2)_{x_i}$	$(C_3)_{x_i}$	$(C_4)_{x_i}$	$[x_i]_D$
x_1	$\{x_1,x_2,x_4,x_5\}$	$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$	$\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$	$\{x_1,x_2,x_4,x_5\}$	$\{x_1,x_2,x_3\}$
x_2	$\{x_2,x_5\}$	$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$	$\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$	$\{x_2,x_5\}$	$\{x_1,x_2,x_3\}$
x_3	$\{x_2,x_3,x_5,x_6\}$	$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$	$\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$	$\{x_2,x_3,x_5,x_6\}$	$\{x_1,x_2,x_3\}$
x_4	$\{x_1,x_2,x_4,x_5\}$	$\{x_4,x_5\}$	$\{x_4\}$	$\{x_4,x_5\}$	$\{x_4,x_5,x_6\}$
x_5	$\{x_2,x_5\}$	$\{x_4,x_5\}$	$\{x_4,x_5,x_6\}$	$\{x_5\}$	$\{x_4,x_5,x_6\}$
x_6	$\{x_2,x_3,x_5,x_6\}$	$\{x_4,x_5,x_6\}$	$\{x_4,x_5,x_6\}$	$\{x_5,x_6\}$	$\{x_4,x_5,x_6\}$

例 5 利用命题 5 和命题 6 的计算结果如下所示：

$\boldsymbol{G}(\underline{B}(D_1))=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{G}(\underline{B}(D_2))=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{G}(\overline{B}(D_1))=[1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{G}(\overline{B}(D_2))=[1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{G}(pos_B(D))=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{G}(bn_B(D))=[1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{G}(neg_B(D))=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}}$

3　动态覆盖信息系统的矩阵递增方法

本章将探讨覆盖个数变化时粗集计算的矩阵方法。因为集合的覆盖近似算子、正域、负域和边界域都可以由 n 维列向量 $\boldsymbol{P}(X)$ 诱导得到，所以当覆盖个数变化时，其关键问题是关系矩阵和对角矩阵的构建。因此，相对于重新建立关系矩阵及对角矩阵，如果能够在原来矩阵的基础上及时更新关系矩阵、对角矩阵，就可以减少一定的工作量。

引理 2　设 (U,Δ) 是一个覆盖信息系统，$B_1,B_2\subseteq\Delta$，则 $\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_{B_1}}\geqslant\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_{B_1\cup B_2}}$，$\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_{B_2}}\geqslant\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_{B_1\cup B_2}}$。

推论 4　设 (U,Δ) 是一个覆盖信息系统，B_1、$B_2\subseteq\Delta$ 且 $B_1\cap B_2=\varnothing$。令 $\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_{B_1\cup B_2}}=(m_{ij}^+)_{n\times n}$、$\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_{B_1}}=(m_{ij})_{n\times n}$ 分别是二元关系 $R_{B_1\cup B_2}$、R_{B_1} 诱导的关系矩阵，则当 $B_1\cup B_2$ 时，任意 $x_i,x_j\in U$，$m_{ij}^+=\begin{cases}1, & m_{ij}=1\wedge(x_i,x_j)\in R_{B_2}\\0, & m_{ij}=0\vee(x_i,x_j)\notin R_{B_2}\end{cases}$。

显然，当 $B_1\cup B_2$ 时，若 $m_{ij}=0$，则 $m_{ij}^+=0$。

例 6　在例 2 中，令 $B_1=\{C_1\},B_2=\{C_2,C_3\}$，则由定义 6 可得 $B_1\cup B_2$ 的关系矩阵为：

$$\boldsymbol{M}_{5\times5}^{R_{B_1}}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

根据推论 4，若 $m_{ij}=0$，则 $m_{ij}^+=0$。又 $m_{ii}=1(1\leqslant i,j\leqslant n)$，因此 $\boldsymbol{M}_{5\times5}^{R_{B_1\cup B_2}}=\mathrm{diag}(1,1,1,1,1)$。

推论 5　设 (U,Δ) 是一个覆盖信息系统，$B_1,B_2\subseteq\Delta$ 且 $B_1\cap B_2=\varnothing$。$\boldsymbol{\Lambda}_{n\times n}^{R_{B_1}}=\mathrm{diag}(1/\lambda_1,1/\lambda_2,\cdots,1/\lambda_n)$、$\boldsymbol{\Lambda}_{n\times n}^{R_{B_1\cup B_2}}=\mathrm{diag}(1/\lambda_1^+,1/\lambda_2^+,\cdots,1/\lambda_n^+)$ 分别是 $\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_{B_1}}$ 和 $\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_{B_1\cup B_2}}$ 诱导的对角矩阵，其中 $\lambda_i=\sum_{j=1}^{n}m_{ij}$。那么 $\lambda_i^+\leqslant\lambda_i(1\leqslant i\leqslant n)$，且 $\lambda_i^+=\lambda_i-\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\oplus m_{ij}^+$，这里 $m_{ij}\oplus m_{ij}^+=\begin{cases}1, & m_{ij}\neq m_{ij}^+\\0, & m_{ij}=m_{ij}^+\end{cases}$。

证明　由推论 4 知，因为 $\lambda_i=\sum_{j=1}^{n}m_{ij}$，则当 $B_1\cup B_2$ 时，若 $m_{ij}=m_{ij}^+$，则 m_{ij} 保持不变；若 $m_{ij}\neq m_{ij}^+$，即 m_{ij} 由 1 变为 0，则 λ_i 变小。因此，只需用 λ_i 减去 m_{ij} 由 1 变为 0 的部分便可得到 λ_i^+，即 $\lambda_i^+=\lambda_i-\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\oplus m_{ij}^+$。

例 7　在例 6 中，$\boldsymbol{\Lambda}_{5\times5}^{R_{B_1}}=\mathrm{diag}(1/2,1,1/2,1,1/2)$。当 $B_1\cup B_2$ 时，$\lambda_1^+=\lambda_1-1=1$，$\lambda_2^+=\lambda_2=1$，$\lambda_3^+=\lambda_3-1=1$，$\lambda_4^+=\lambda_4=1$，$\lambda_5^+=\lambda_5-1=1$。因此 $\boldsymbol{\Lambda}_{5\times5}^{R_{B_1\cup B_2}}=\mathrm{diag}(1,1,1,1,1)$。

推论 6　设 (U,Δ) 是一个覆盖信息系统，$X\subseteq U$，B_1、$B_2\subseteq\Delta$ 且 $B_1\cap B_2=\varnothing$。令：

$$\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_{B_1}}\boldsymbol{G}(X)=(\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_n)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{M}_{n\times n}^{R_{B_1\cup B_2}}\boldsymbol{G}(X)=(\kappa_1^+,\kappa_2^+,\cdots,\kappa_n^+)^{\mathrm{T}}$$

其中 $\kappa_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} g_j, \boldsymbol{G}(X) = (g_1, g_2, \cdots, g_n)^{\mathrm{T}}$,那么 $\kappa_i^+ \leqslant \kappa_i$ 且 $\kappa_i^+ = \kappa_i - \sum_{j=1}^{n} (m_{ij} \oplus m_{ij}^+) g_j (1 \leqslant i \leqslant n)$。

证明 当 $B_1 \cup B_2$ 时,若任意 $j = 1, 2, \cdots, n$,有 $m_{ij} = m_{ij}^+$,则 $\kappa_i^+ = \kappa_i$;若存在 $1 \leqslant j \leqslant n$ 使 $m_{ij} \neq m_{ij}^+$,即 $m_{ij}^+ = 0$,则 κ_i 变小,此时 $\kappa_i^+ = \kappa_i - m_{ij} g_j$。因此 $\kappa_i^+ \leqslant \kappa_i$ 且 $\kappa_i^+ = \kappa_i - \sum_{j=1}^{n} (m_{ij} \oplus m_{ij}^+) g_j (1 \leqslant i \leqslant n)$。

接着我们讨论覆盖个数减少的情况。

推论7 设 (U, Δ) 是一个覆盖信息系统,$B_2 \subset B_1 \subseteq \Delta$,$\boldsymbol{M}_{n \times n}^{R_{B_1 - B_2}} = (m_{ij}^-)_{n \times n}$、$\boldsymbol{M}_{n \times n}^{R_{B_1}} = (m_{ij})_{n \times n}$ 分别是二元关系 $R_{B_1 - B_2}$、R_{B_1} 诱导的关系矩阵,则对任意 $x_i, x_j \in U$ 有:

$$m_{ij}^- = \begin{cases} 1, & m_{ij} = 1 \vee (x_i, x_j) \in R_{B_1 - B_2} \\ 0, & m_{ij} = 0 \wedge (x_i, x_j) \notin R_{B_1 - B_2} \end{cases}$$

显然,若 $m_{ij} = 1$,则 $m_{ij}^- = m_{ij} = 1$。

例8 参看例5,设 $B_1 = \{C_2, C_3, C_4\}, B_2 = \{C_3\}$,由定义6可得:

$$\boldsymbol{M}_{6 \times 6}^{R_{B_1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

因为当 $B_1 - B_2$ 时,若 $m_{ij} = 1$,则 $m_{ij}^- = m_{ij} = 1$,所以:

$$\boldsymbol{M}_{6 \times 6}^{R_{B_1 - B_2}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

推论8 设 (U, Δ) 是一个覆盖信息系统,$B_2 \subset B_1 \subseteq \Delta$,$\boldsymbol{\Lambda}_{n \times n}^{R_{B_1}} = \mathrm{diag}(1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \cdots, 1/\lambda_n)$、$\boldsymbol{\Lambda}_{n \times n}^{R_{B_1 - B_2}} = \mathrm{diag}(1/\lambda_1^-, 1/\lambda_2^-, \cdots, 1/\lambda_n^-)$,则 $\lambda_i^- = \lambda_i + \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \oplus m_{ij}^- (1 \leqslant i \leqslant n)$。

证明 与推论5类似。

例9 在例8中,$\boldsymbol{\Lambda}_{6 \times 6}^{R_{B_1}} = \mathrm{diag}(1/3, 1, 1/2, 1, 1, 1/2)$。当 $B_1 - B_2$ 时,$\lambda_1^- = \lambda_1 + 1 = 4, \lambda_2^- = \lambda_2 + 1 = 2, \lambda_3^- = \lambda_3 + 1 = 3, \lambda_4^- = \lambda_4 + 1 = 2, \lambda_5^- = \lambda_5 = 1, \lambda_6^- = \lambda_6 = 2$。

因此 $\boldsymbol{\Lambda}_{6 \times 6}^{R_{B_1 - B_2}} = \mathrm{diag}(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$。

推论9 设 (U, Δ) 是一个覆盖信息系统,$X \subseteq U, B_2 \subset B_1 \subseteq \Delta$。令

$$\boldsymbol{M}_{n \times n}^{R_{B_1}} \boldsymbol{G}(X) = (\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_n)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{M}_{n \times n}^{R_{B_1 - B_2}} \boldsymbol{G}(X) = (\kappa_1^-, \kappa_2^-, \cdots, \kappa_n^-)^{\mathrm{T}}$$

则 $\kappa_i^- = \kappa_i + \sum_{j=1}^{n} (m_{ij} \oplus m_{ij}^-) g_j (1 \leqslant i \leqslant n)$。

证明 与推论5类似。

4 结语

本文在覆盖信息系统中定义了由覆盖诱导一个二元关系,同时提出了关系矩阵。利用关系矩阵给出了集合的覆盖近似算子、正域、负域、边界域的表达式。最后在动态覆盖信息系统中,讨论了覆盖个数变化对关系矩阵的影响,给出了关系矩阵间的关系式,避免了采用不断刷新覆盖信息系统静态求解集合的覆盖近似集的重复计算,不仅节省时间和空间,也为进一步在覆盖信息系统中覆盖个数变化时动态获取决策规则提供了一种新途径。下一步要做的工作将是通过实验仿真验证本文方法的性能,并且对论域变化时覆盖粗糙集计算的矩阵方法进行相关研究。

参考文献:

[1] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341 - 356.

[2] ZAKOWSKI W. Approximation in the space (U, Π) [J]. Demonstratica Mathematica, 1983, 16(3): 761 - 769.

[3] GRECO S, MATARAZZO B, SLOWINSKI R. Rough sets theory for multicriteria decision analysis[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 129(1): 1 - 47.

[4] ZHU W. Topological approaches to covering rough sets[J]. Information Sciences, 2007, 17(6): 1499 - 1508.

[5] ZHANG J, LI T, CHEN H. Composite rough sets for dynamic data mining[J]. Information Sciences, 2014, 257(1): 81 - 100.

[6] YAO Y, YAO B. Covering based rough set approximations[J]. Information Sciences, 2012, 200(10): 91 - 107.

[7] CHEN D, WANG C, HU Q. A new approach to attribute reduction of consistent and inconsistent covering decision systems[J]. Information Sciences, 2007, 177(2): 3500 - 3518.

[8] WANG C, HE Q, CHEN D, *et al*. A novel method for attribute reduction of covering decision systems [J]. Information Sciences, 2014, 254(1): 181 - 196.

[9] WANG C, CHEN D, HU Q. A comparative study of ordered and covering information systems[J]. Fundamenta Informaticae, 2013, 123: 351 - 363.

[10] LANG G. Applications of rough sets attribute reductions and data compressions[D]. Changsha: Hunan University, 2003: 32 - 54. (郎广名. 粗糙集理论在属性约简和数据压缩中的应用[D]. 长沙: 湖南大学, 2013: 32 - 54.)

[11] ZHANG J, LI T, RUAN D, *et al*. Rough sets based matrix approaches with dynamic attribute variation in set-valued information systems [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2012, 53(4): 620 - 635.

[12] LUO C, LI T, CHEN H, *et al*. Fast algorithms for computing rough approximations in set-valued decision systems while updating criteria values[J]. Information Sciences, 2015, 299(1): 221 - 242.

[13] LI S, LI T, HU J. Update of approximations in composite information systems[J]. Knowledge-Based Systems, 2015, 83(7): 138 - 148.

[14] ZENG A, LI T, LIU D, *et al*. A fuzzy rough set approach for incremental feature selection on hybrid information systems [J]. Fuzzy Set and System, 2015, 258(1): 39 - 60.

[15] BAZAN J. A comparison of dynamic and non-dynamic rough set methods for extracting laws from decision tables [C]// Rough sets in knowledge Discovery 1: Methodology and Applications. Heidelberg: Physica Verlag, 1998: 321 - 365.