



文章编号:1001-9081(2017)07-2114-04

DOI:10.11772/j.issn.1001-9081.2017.07.2114

基于 Dubins 路径的无人艇运动规划算法

刘乐柱, 肖长诗*, 文元桥

(武汉理工大学 航运学院, 武汉 430000)

(* 通信作者电子邮箱 cs_xiao@hotmail.com)

摘要:针对无人艇运动规划问题,通过 Dubins 路径的理论分析,提出一种利用纯粹几何方法的 Dubins 路径计算方法。该方法中没有出现解方程组的运算,而是首先根据无人艇运动状态计算转向圆,然后利用几何方法计算转向圆间的公切线,最后通过公切线连接得到 Dubins 路径。通过 5 组仿真实验验证了所提方法的有效性。前 4 组仿真实验分别设计了计算 Dubins 路径过程中可能出现的各种情形,以验证算法适用于多种情况的 Dubins 路径计算。最后一组仿真实验用于无人艇的路径规划及运动状态调整,仿真结果表明,基于 Dubins 路径的无人艇运动规划算法是可行的。

关键词:无人艇;路径规划;Dubins 路径;运动规划

中图分类号: TP391.9; TP18 **文献标志码:**A

Motion planning algorithm for unmanned surface vehicle based on Dubins path

LIU Lezhu, XIAO Changshi*, WEN Yuanqiao

(School of Navigation, Wuhan University of Technology, Wuhan Hubei 430000, China)

Abstract: Aiming at the problem of motion planning for unmanned surface vehicle, a new method of calculating Dubins path by using pure geometric method was proposed by the theoretical analysis of Dubins path. The operation of solving equations was not used by the proposed method. Firstly, the steering circle was calculated according to the motion state of the unmanned surface vehicle. Then, the geometric method was used to compute the common tangent of the steering circles. Finally, the Dubins path was obtained by the common tangent connection. The effectiveness of the proposed method was verified through five groups of simulation experiments. All kinds of situations in the process of calculating the Dubins path were designed in the first four simulation experiments, the proposed algorithm was verified to be applicable to a variety of Dubins path calculation. The last experiment of simulations was used for path planning and motion state adjustment of unmanned surface vehicle. The simulation results show that the motion planning algorithm based on Dubins path is feasible.

Key words: unmanned surface vehicle; path planning; Dubins path; motion planning

0 引言

路径规划是无人艇自主导航的关键技术之一,路径规划已在移动机器人技术中得到广泛研究。路径规划是指在有障碍物的工作环境中,利用一定的算法或某些优化准则使移动机器人能从起始点绕开障碍物到达目标点,在此过程中尽量优化机器人运动轨迹^[1-3]。

路径规划算法已得到广泛关注和研究,由于真实环境的复杂性,及路径规划的自身困难,至今路径规划仍然是移动机器人自主导航的研究热点之一。现已提出多种路径规划算法。A* 算法是一种典型的启发式搜索算法^[4],最早由 Nilsson 等^[5]提出。A* 算法在路径规划研究中得到广泛应用和发展,考虑真实环境中各种因素的影响,在评价函数中加入描述真实环境的各种参量。例如吴天羿等^[6]考虑坡度及路面粗糙度等因素的影响对越野车路径规划研究;Guinness 等^[7]研究了浮冰水域船舶路径规划问题。

考虑动力学和运动学约束时,路径规划将朝向运动规划发展。运动规划的最简单形式是一个纯几何问题,给定机器人形状和障碍物分布,计算其无碰路径^[8]。运动规划中需要

考虑无人艇的运动学约束,如旋回半径、无人艇的操纵方程等。运动规划已经不仅仅是在位置坐标(地图)上进行路径规划,而是在包含运动状态的位姿空间中搜索合适的运动轨迹及其运动状态。运动规划常用的算法是基于随机采样的路图或者树状图算法,如随机路图法(Probabilistic Roadmap Method, PRM)^[8-9]、快速搜索随机树(Rapidly-exploring Random Tree, RRT)^[10-11]。但这些基于随机采样的方法已被证明是概率完备但结果不最优的。Dubins 路径采用圆弧—直线—圆弧的形式构造轨迹路线,其中圆弧部分可以作为无人艇转向形成的旋回圈,直线部分可以作为无人艇直行的轨迹,因此本文选取 Dubins 路径作为无人艇的基本路径,进行路径规划。

基于 Dubins 路径的路径规划方法的理论依据是已经证明了满足曲率限制的最短曲线是圆弧与直线构成的^[12]。在此基础上,研究者尝试通过设计各种曲线连接构成满足运动约束的规划路径,如文献[12]中设计的回旋曲线。Dubins 路径的计算常用的方法是通过建立方程组进行求解,如文献[13]中通过角度和位置变化等约束建立方程组进行计算。本文设计一种利用纯几何的方法进行 Dubins 路径的计算,该

收稿日期:2016-11-16;修回日期:2016-12-23。

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51579204, 51679180);武汉理工大学自主创新基金资助项目(2016IVA064)。

作者简介:刘乐柱(1984—),男,安徽淮北人,博士研究生,主要研究方向:路径规划、姿态控制;肖长诗(1974—),男,湖北松滋人,教授,博士,主要研究方向:机器视觉、无人航行器;文元桥(1975—),男,湖北松滋人,教授,博士,主要研究方向:水上交通安全与环境。



方法直接易行,没有出现解方程组的运算。

1 问题描述

无人艇状态矢量 $s = (x, y, \cos \theta, \sin \theta, v)^T$, 其中包含无人艇位置坐标 $P(x, y)$ 和速度方向向量 $v_{\text{dire}} = (\cos \theta, \sin \theta)^T$ 及速度大小 v 。无人艇运动规划可以描述成计算由起始状态矢量 s_{start} 至目标状态矢量 s_{target} 的满足无人艇运动约束的无碰最短路径。

无人艇以一定速度转向时,转向半径需要大于在此速度下的极小半径。基于 Dubins 路径的路径规划方法可以有效解决此问题。Dubins 路径是由起始转向圆弧与目标转向圆弧通过公共切线相连构成,其中,起始转向圆弧半径 $R_{v_{\text{start}}}$ 和目标转向圆弧半径 $R_{v_{\text{target}}}$ 需要满足无人艇运动约束,因此,在获取无人艇起始状态矢量 s_{start} 和目标状态矢量 s_{target} 后,计算 Dubins 路径是路径规划的一个核心问题。

下面通过理论分析设计一种完全利用几何方法计算 Dubins 路径的运动规划算法。

2 理论分析

2.1 转向圆计算

无人艇状态矢量 $s = (x, y, \cos \theta, \sin \theta, v)^T$ 以半径 R_v 转向,其转向圆可以有两种选择。按右手法则,逆时针转向标记为 \uparrow ,顺时针转向标记为 \downarrow 。

由于 $\overrightarrow{CP}_{\text{dire}} \perp v_{\text{dire}}$, 圆心 C 坐标计算式如下:

$$\overrightarrow{CP}_{\text{dire}} = \pm (-\sin \theta, \cos \theta)^T \quad (1)$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} - R_v \overrightarrow{CP}_{\text{dire}} \quad (2)$$

若 $\overrightarrow{CP}_{\text{dire}} \times v_{\text{dire}} = (0, 0, 1)^T$, 则记为圆 C_{\uparrow} , 反之记为圆 C_{\downarrow} , 如图 1 所示。无人艇由起始状态调整至目标状态所经过的路径是经计算选择的一个起始转向圆与一个目标转向圆之间通过合适的公切线相连得到的有向曲线,此有向曲线即是一条 Dubins 路径。

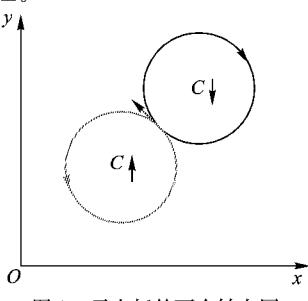


图 1 无人艇的两个转向圆

Fig. 1 Two steering circles of unmanned surface vehicle

2.2 公切线计算

两个外离圆之间的公切线有 4 条,分别为两条外公切线和两条内公切线,但可以按方向连接两个外离有向圆的公切线仅有 1 条,且若两有向圆的转向相同,连接两圆的公切线是一条外公切线;若两有向圆的转向相反,连接两圆的公切线是一条内公切线。此结论可利用下面定理证明。

定理 1 平面上不同两点 A, B ,且点 C, D 不在直线 AB 上:

- 1) 若点 C, D 在直线 AB 同侧,则 $\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{AB}$ 所得两矢量同向;
- 2) 若点 C, D 在直线 AB 异侧,则 $\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{AB}$ 所得两矢量反向。

外离两圆的 Dubins 路径计算方法如下:

1) 两圆同向,两圆通过外公切线相连。

如图 2 所示,连心线 C_1C_2 与外切线的夹角 α 按式(3)求得:

$$\alpha = \arcsin(|r_1 - r_2| / |C_1C_2|) \quad (3)$$

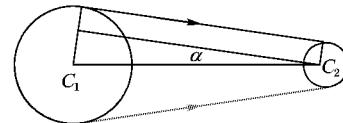


图 2 同向圆的 Dubins 路径中的公切线

Fig. 2 Common tangent of Dubins path between steering circles with same rotation direction

若圆 C_1 与圆 C_2 的转向方向为 \uparrow ,则切线为图 2 中灰色直线所示,两切点按下面公式计算:

$$\overrightarrow{e}_R = \text{rotation}(\overrightarrow{e_{C_1C_2}}, \alpha - \pi/2) \quad (4)$$

$$\text{切点 } 1: \overrightarrow{OC_1} + r_1 \overrightarrow{e}_R \quad (5)$$

$$\text{切点 } 2: \overrightarrow{OC_2} + r_2 \overrightarrow{e}_R \quad (6)$$

其中, $\overrightarrow{e_{C_1C_2}}$ 是矢量 $\overrightarrow{C_1C_2}$ 的单位矢量; 函数 rotation 是矢量旋转函数,按式(7)计算,即逆时针旋转为正。

$$\text{rotation}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \theta\right) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (7)$$

若圆 C_1 与圆 C_2 的转向方向为 \downarrow 则切线为图 2 中黑色直线所示,由式(8)计算得到 \overrightarrow{e}_R 后,两切点仍按式(5)~(6)计算。

$$\overrightarrow{e}_R = \text{rotation}(\overrightarrow{e_{C_1C_2}}, \pi/2 - \alpha) \quad (8)$$

2) 两圆异向,两圆通过内公切线相连。

如图 3 所示,连心线 C_1C_2 与内切线的夹角 α 按式(9)求得:

$$\alpha = \arcsin((r_1 + r_2) / |C_1C_2|) \quad (9)$$

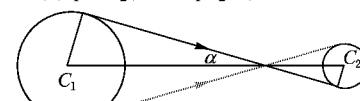


图 3 反向圆 Dubins 路径中的公切线

Fig. 3 Common tangent of Dubins path between steering circles with opposite rotation direction

若圆 C_1 的转向为 \uparrow 而圆 C_2 的转向方向为 \downarrow ,则切线为图 3 中灰色直线所示,两切点按下面公式计算:

$$\overrightarrow{e}_R = \text{rotation}(\overrightarrow{e_{C_1C_2}}, \alpha - \pi/2) \quad (10)$$

$$\text{切点 } 1: \overrightarrow{OC_1} + r_1 \overrightarrow{e}_R \quad (11)$$

$$\text{切点 } 2: \overrightarrow{OC_2} - r_2 \overrightarrow{e}_R \quad (12)$$

其中, $\overrightarrow{e_{C_1C_2}}$ 是矢量 $\overrightarrow{C_1C_2}$ 的单位矢量; 函数 rotation 是矢量旋转函数。

若圆 C_1 的转向为 \downarrow 而圆 C_2 的转向方向为 \uparrow ,则切线为图 3 中黑色直线所示,由式(13)计算得到 \overrightarrow{e}_R 后,两切点仍按式(11)~(12)计算。

$$\overrightarrow{e}_R = \text{rotation}(\overrightarrow{e_{C_1C_2}}, \pi/2 - \alpha) \quad (13)$$

两圆的位置关系分为外离、外切、相交、内切、内含五种类型。外切和相交时,外公切线依然存有两条,与外离时一样,此时若两圆的转向相同,Dubins 路径计算方法与外离时一致。内切时,两条外公切线退化成一条,同向圆间的 Dubins 路径中公切线部分退化成两圆的切点。内含时,已不存在外公切线。对于内公切线,两圆外切时已经退化成一条,反向两圆间的 Dubins 路径中内公切线部分退化成两圆的切点。相交、内切、内含已不存在内公切线。上述结论可总结为表 1。



表1 Dubins路径中的公切线计算方法

Tab. 1 Calculation method of common tangent of Dubins path

位置关系	两圆同向		两圆方向	
	↑↑	↓↓	↑↓	↓↑
外离	外公切线	外公切线	内公切线	内公切线
外切	外公切线	外公切线	两圆切点	两圆切点
相交	外公切线	外公切线	无路径	无路径
内切	两圆切点	两圆切点	无路径	无路径
内含	无路径	无路径	无路径	无路径

由以上分析可得,Dubins路径的计算步骤可归纳为以下3步:

1) 分别计算起始状态和目标状态的转向圆,各↑↓两个;

2) 分别选择起始转向圆与目标转向圆,按上面计算方法依次计算连接两转向圆的公切线。接着计算路径长度,由起始点按方向经起始转向圆至公切线切点,然后沿着公切线至目标转向圆切点,按方向经目标转向圆至目标点的路径长度。

3) 在计算得到的Dubins路径(共4条或少于4条)中,选择最短路径并输出。

根据以上分析得到的结论,可以设计下面的Dubins路径计算算法。

3 算法设计

3.1 数据结构

由理论分析,根据问题特点,定义以下三种结构体数据类型:

1) 无人艇状态数据类型;2) 圆数据类型;3) 路径数据类型。

这样算法中主要包含:起始状态、目标状态两个状态数据;两个旋转方向相反的起始圆和两个旋转方向相反的目标圆共4个圆数组数据;一个存放4条Dubins路径的路径数据。

3.2 算法流程

本文提出的基于Dubins路径的路径规划算法流程如图4所示。

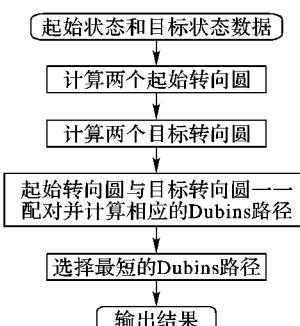


图4 本文算法流程

Fig. 4 Flow chart of the proposed algorithm

本文提出的计算Dubins路径的算法完全使用几何方法求解,算法简易实用。下面通过仿真实验验证此算法的有效性,仿真实验中设计5个算例,其中4个分别验证外离、外切、内切、内含四种圆的位置关系的Dubins路径计算,最后给出一个无人艇运动状态调整的仿真实验。

4 仿真实验

仿真实验分为两部分:一部分是验证本文所提算法可以

计算两圆各种位置关系下的Dubins路径;另一部分是使用Dubins路径完成无人艇运动状态调整。

4.1 Dubins路径计算

本节使用4个算例,如表2所示,分别验证外离、外切、内切、内含四种圆的位置关系的Dubins路径计算。

表2 Dubins路径计算算例

Tab. 2 Calculation examples of Dubins path

算例	起始状态		目标状态		位置关系
	坐标	半径	坐标	半径	
1	0,0	25	90,0	10	外离
2	0,0	25	70,0	10	外离、外切
3	0,0	25	50,0	10	外离、外切、内切
4	0,0	25	30,0	10	外离、内切、内含

算例1数值实验结果如图5所示,此算例中起始转向圆与目标转向圆的位置关系均是外离,由起始状态至目标状态的Dubins路径存有4条。图5(a)给出由起始转向圆连接至目标转向圆间的公切线,图5(b)给出4条Dubins路径,其中灰色曲线长度为 $s = 121.55$,是最短的一条路径,即最终输出的规划路径。

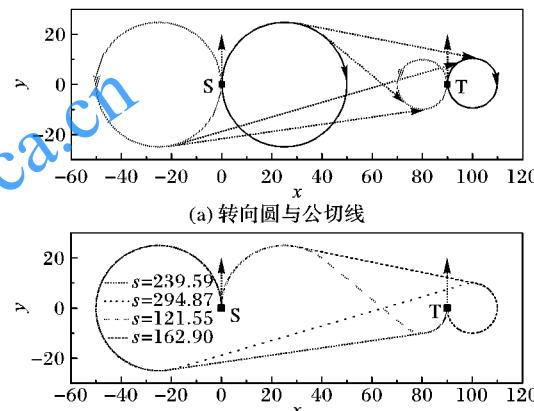


图5 算例1计算结果

Fig. 5 Calculation results of example 1

算例2数值实验结果如图6所示,此算例中起始转向圆与目标转向圆的位置关系有两种:外离和外切。圆 $C_{S\uparrow}$ 与圆 $C_{T\downarrow}$ 之间的位置关系是外切,Dubins路径中内公切线退化成切点,这样由起始状态至目标状态的Dubins路径仍存有4条,如图6(b)所示,其中灰色曲线长度 $s = 109.96$,为最短的一条,即最终输出的规划路径。

算例3数值实验结果如图7所示,此算例中起始转向圆与目标转向圆的位置关系有三种:外离、外切及内切。圆 $C_{S\uparrow}$ 与圆 $C_{T\downarrow}$ 之间的位置关系是内切,圆 $C_{S\uparrow}$ 与圆 $C_{T\downarrow}$ 之间不存在内公切线,即此两圆之间不存在Dubins路径。圆 $C_{S\uparrow}$ 与圆 $C_{T\uparrow}$ 之间的位置关系是外切,两圆通过外公切线连接成Dubins路径,如图7(a)所示。这样由起始状态至目标状态的Dubins路径仅有3条,如图7(b)所示,其中灰色曲线长度 $s = 124.66$,为最短的一条,即最终输出的规划路径。

算例4数值实验结果如图8所示,此算例中起始转向圆与目标转向圆的位置关系有三种:外离、内切及内含。圆 $C_{S\uparrow}$ 与圆 $C_{T\downarrow}$ 之间的位置关系是内含,圆 $C_{S\uparrow}$ 与圆 $C_{T\downarrow}$ 不存在Dubins路径。圆 $C_{S\uparrow}$ 与圆 $C_{T\uparrow}$ 之间的位置关系是内切,两圆之



间的外公切线退化成切点,但仍存有 Dubins 路径。这样由起始状态至目标状态的 Dubins 路径仅存有 3 条,如图 8(b)所示,其中灰色曲线长度 $s = 109.96$,为最短的一条,即最终输出的规划路径。

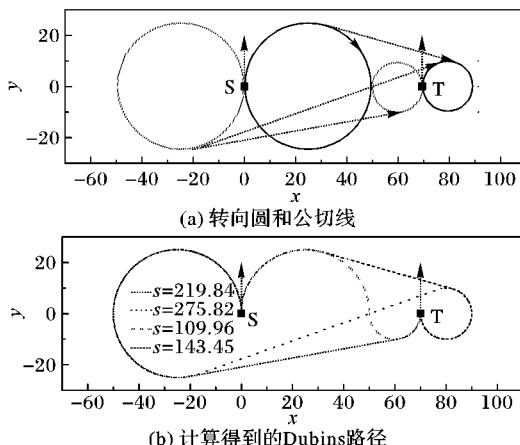


Fig. 6 Calculation results of example 2

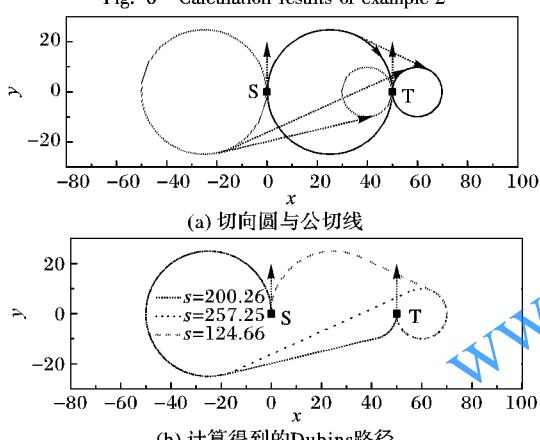


Fig. 7 Calculation results of example 3

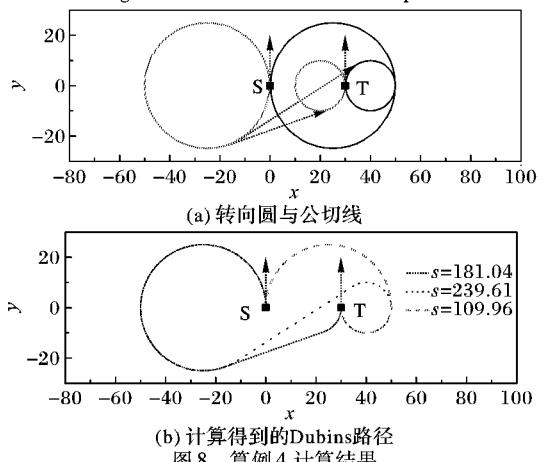


Fig. 8 Calculation results of example 4

通过 4 组算例的数值实验可以看出,本文算法对两圆各种位置关系的 Dubins 路径计算均能得到正确的结果,这充分验证了该算法的有效性。该算法中完全使用几何方法进行计算,计算量较小,适合应用于在线路径规划。

4.2 无人艇运动状态调整

本节是仿真实验中的第 5 个算例,使用 Dubins 路径作无

人艇运动状态调整。无人艇运动响应模型为:

$$\psi'' + \psi'/T = K\delta/T \quad (14)$$

其中: ψ 为船艏向; δ 为舵角。数值实验中取 $K = 0.285$, $T = 0.275$ 。

航迹跟踪使用比例-积分-微分 (Proportion-Integration-Differentiation, PID) 控制, 定义偏差 $e(t)$ 为船当前位置与预设航迹之间的距离。仿真结果如图 9 所示, 图中分别给出无人船航迹与预设航迹对比图及航向角、偏差函数 $e(t)$ 的变化曲线。图 10 给出仿真实验中的舵角操纵过程。仿真结果表明, 无人艇按照预设航迹进行航行, 航向角的变化较平滑没有出现过多的超调。航迹偏差维持在 2.5 m 范围内, 舵角的操纵在左右 30° 舵以内, 操舵过程也较合理。

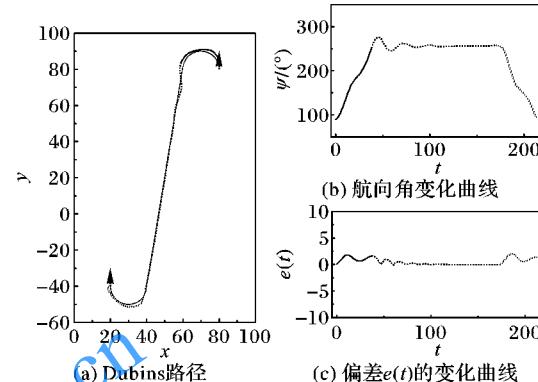


Fig. 9 Unmanned surface vehicle motion state adjustment

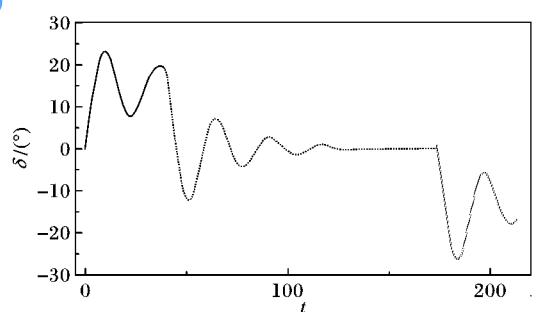


图 10 仿真实验中舵角操纵过程

Fig. 10 Rudder angle control process in simulation experiment

5 结语

本文提出一种基于纯粹几何理论的 Dubins 路径计算方法。对于 Dubins 路径计算可能出现的各种情况, 该方法均能够进行计算。仿真结果表明所提方法的 Dubins 路径计算直接有效, 基于 Dubins 路径的无人艇运动规划算法用于无人艇的运动状态调整是可行的。接下来将利用文中所提算法对无人艇自主路径规划和自主靠泊等方向作进一步的研究。

参考文献 (References)

- [1] 朱大奇, 颜明重. 移动机器人路径规划技术综述 [J]. 控制与决策, 2010, 25(7): 961–967. (ZHU D Q, YAN M Z. Survey on technology of mobile robot path planning [J]. Control and Decision, 2010, 25(7): 961–967.)
- [2] 孟傀, 王田苗. 一种移动机器人全局最优路径规划算法 [J]. 机器人, 2008, 30(3): 217–222. (MENG C, WANG T M. A global optimal path planning algorithm for mobile robot [J]. Robot, 2008, 30(3): 217–222.)

(下转第 2123 页)



- ence and Applied Information Technology, 2013, 2(2): 5–8.
- [5] LOPEZ-ANTEQUERA M, PETKOV N, GONZALEZ-JIMENEZ J. Image-based localization using Gaussian processes [C]// IPIN 2016: Proceedings of the 2016 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation. Piscataway, NJ: IEEE, 2016: 1–7.
- [6] 罗印. 基于手机加速度传感器的测距系统设计与实现[J]. 软件, 2015, 36(2): 73–76. (LUO Y. The design and implementation of distance measurement based mobile phone acceleration sensor [J]. Software, 2015, 36(2): 73–76.)
- [7] MUHLENBROCK M, BRDICZKA O, SNOWDON D. Learning to detect user activity and availability from a variety of sensor data [C]// PERCOM 2004: Proceedings of the 2004 Pervasive Computing and Communications. Piscataway, NJ: IEEE, 2004: 13–22.
- [8] 刘程, 阳洪. 自适应计步检测算法研究[J]. 压电与声光, 2015, 37(2): 258–270. (LIU C, YANG H. Study on adaptive pedometer detection algorithm [J]. Piezoelectrics & Acoustooptics, 2015, 37(2): 258–270.)
- [9] 王文杰, 李军. 基于手机加速度传感器的计步算法设计[J]. 工业控制计算机, 2016, 29(1): 75–79. (WANG W J, LI J. Algorithm design of counting steps based on mobile acceleration sensor [J]. Industrial Control Computer, 2016, 29(1): 75–79.)
- [10] 陈国良, 张言哲, 杨洲. 一种基于手机传感器自相关分析的计步器实现方法[J]. 中国惯性技术学报, 2014, 22(6): 794–798. (CHEN G L, ZHANG Y Z, YANG Z. Realization of pedometer with auto-correlation analysis based on mobile phone sensor [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2014, 22(6): 794–798.)
- [11] YI W J, JIA W, SANIE J. Mobile sensor data collector using Android smartphone [C]// NWSCAS 2012: Proceedings of the 2012 IEEE 55th International Midwest Symposium on Circuits and Sys-
- tems. Piscataway, NJ: IEEE, 2012: 956–959.
- [12] PACKIARAJ D, VINOY K J, RAMESH M, et al. Design of compact low pass filter with wide stop band using tri-section stepped impedance resonator [J]. International Journal of Electronics and Communications, 2011, 65(12): 1012–1014.
- [13] 周志华. 机器学习[M]. 北京: 清华大学出版社, 2016: 121–122. (ZHOU Z H. Machine Learning [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2016: 121–122.)
- [14] ZHANG J J, CHU Y L. The use of sliding time window in the real-time solution of ground-based GPS data [C]// ICEOE 2011: Proceedings of the 2011 International Conference on Electronics and Optoelectronics. Piscataway, NJ: IEEE, 2011: 421–423.
- [15] 孙作雷, 茅旭初, 田蔚风, 等. 基于动作识别和步幅估计的步行者航位推算[J]. 上海交通大学学报, 2008, 42(12): 2002–2009. (SUN Z L, MAO X C, TIAN W F, et al. Pedestrian dead reckoning based on activity recognition and stride assessment [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2008, 42(12): 2002–2009.)

This work is partially supported by the Project of Science & Technology Department of Sichuan Province (2014GZ0104), West Light Foundation of the Chinese Academy of Sciences (2015XBZG).

ZHONG Yong, born in 1966, Ph. D., research fellow. His research interests include big data, cloud computing, database.

GUAN Jichang, born in 1991, M. S. candidate. His research interests include big data, indoor location service.

YANG Fan, born in 1978, Ph. D. candidate. His research interests include mobile computing, data mining, machine learning, software engineering.

(上接第2117页)

- [3] 赵先章, 常红星, 曾隽芳, 等. 一种基于粒子群算法的移动机器人路径规划方法[J]. 计算机应用研究, 2007, 24(3): 181–183, 186. (ZHAO X Z, CHANG H X, ZENG J F, et al. Path planning method for mobile robot based on particle swarm algorithm [J]. Application Research of Computers, 2007, 24(3): 181–183, 186.)
- [4] 马少平, 朱小燕. 人工智能[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 21–45. (MA S P, ZHU X Y. Artificial Intelligence [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 21–45.)
- [5] HART P E, NILSSON N J, RAPHAEL B. A formal basis for the heuristic determination of minimum cost paths [J]. IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics, 1968, 4(2): 100–107.
- [6] 吴天羿, 许继恒, 刘建永, 等. 基于改进A*算法的越野路径规划研究[J]. 计算机应用研究, 2013, 30(6): 1724–1726. (WU T Y, XU J H, LIU J Y, et al. Research of cross-country path planning based on improved A* algorithm [J]. Application Research of Computers, 2013, 30(6): 1724–1726.)
- [7] GUINNESS R E, SAARIMAKI J, RUOTSALAINEN L, et al. A method for ice-aware maritime route optimization [C]// PLANS 2014: Proceedings of the 2014 IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium. Piscataway, NJ: IEEE, 2014: 1371–1378.
- [8] HSU D, KINDEL R, LATOMBE J C, et al. Randomized kinodynamic motion planning with moving obstacles [J]. International Journal of Robotics Research, 2002, 21(3): 233–255.
- [9] KAVRAKI L E, ŠVESTKA P, LATOMBE J C, et al. Probabilistic roadmaps for path planning in high dimensional configuration space [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1996, 12(4): 566–580.
- [10] LAVALLE S M. Rapidly-exploring random trees: a new tool for path planning, TR 98-11 [R]. Ames, Iowa: Iowa State University, 1998.
- [11] LAVALLE S M, KUFFNER J J. Randomized kinodynamic planning [J]. International Journal of Robotics Research, 2001, 20(5): 378–400.
- [12] DUBINS L E. On plane curves with curvature [J]. Pacific Journal of Mathematics, 1961, 11(2): 471–481.
- [13] 梁勇, 张友安, 雷军委. 一种基于Dubins路径的在线快速航路规划方法[J]. 系统仿真学报, 25(S1): 291–296. (LIANG Y, ZHANG Y A, LEI J W. New method of online fast path planning based Dubins path [J]. Journal of System Simulation, 25(S1): 291–296.)
- This work is partially supported by the National Natural Science Foundation of China (51579204, 51679180), the Self-determined and Innovative Research Fund of Wuhan University of Technology (2016IVA064).
- LIU Lezhu**, born in 1984, Ph. D. candidate. His research interests include path planning, attitude control.
- XIAO Changshi**, born in 1974, Ph. D., professor. His research interests include machine vision, unmanned vehicle.
- WEN Yuanqiao**, born in 1975, Ph. D., professor. His research interests include maritime traffic safety and environment.