

基于“新息误差”的粒子流滤波算法

周德运¹, 刘 斌^{1,2*}, 苏 茜¹

(1. 冶金自动化与测量技术教育部工程研究中心(武汉大学), 武汉 430081;

2. 冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室(武汉大学), 武汉 430081)

(* 通信作者电子邮箱 liubin@wust.edu.cn)

摘要:在粒子滤波(PF)过程中存在粒子权值退化、维度灾难、计算成本高等问题。粒子流滤波通过构造对数同伦函数避免了粒子权值退化问题,但是在求解边值问题时过于依赖观测方程,当噪声较大时效果较差。针对上述问题,提出了一种改进的粒子流滤波算法。首先,该算法在粒子流动的过程中引入了一种“新息误差”结构,使每个粒子的更新相互独立;其次,利用 Galerkin 有限元法求得边值问题的数值解,从而消除了拟合样本先验可能导致的数值不稳定问题;最后,分别在通用非线性滤波模型和机动目标跟踪模型中对改进的算法进行了性能测试。仿真结果表明,改进的算法可以抑制系统对观测信息的依赖性,在噪声增大的情况下也能得到相对较好的结果,有效改善了滤波精度,而在多维目标跟踪情况下算法的计算效率与滤波精度高于标准粒子滤波。

关键词:粒子滤波;权值退化;粒子流滤波;新息误差;Galerkin 有限元法

中图分类号:TP391.9 **文献标志码:**A

Particle flow filter algorithm based on “innovation error”

ZHOU Deyun¹, LIU Bin^{1,2*}, SU Qian¹

(1. Engineering Research Center for Metallurgical Automation and Measurement Technology,

Ministry of Education (Wuhan University of Science and Technology), Wuhan Hubei 430081, China;

2. Hubei Province Key Laboratory of Systems Science in Metallurgical Process (Wuhan University of Science and Technology),

Wuhan Hubei 430081, China)

Abstract: There exist some problems in the process of Particle Filter (PF), such as particle weight degeneracy, curse of dimensionality, and high computational cost. By constructing a logarithmic homotopy function, particle flow filter can avoid the problem of particle weight degeneracy, but it relies on the observation equation too much when solving the boundary value problem, and has poor effect when the noise is high. To address these problems, an improved particle flow filter algorithm was proposed. Firstly, an “innovation error” structure was introduced into the process of particle flow, so that the update of each particle is independent. Then, the Galerkin finite element method was utilized to obtain the numerical solution of the boundary value problem, so as to avoid the numerical instability problem that may be caused by the fitting sample prior. Finally, the performance of the improved algorithm was tested in the common nonlinear filter model and the maneuvering target tracking model. Simulation results show that the improved algorithm can suppress the dependency of the system on observation information, and has relatively good results with increasing noise, which effectively improve the filtering accuracy, and in multi-dimensional target tracking cases, the algorithm’s computational efficiency and filtering accuracy are higher than those of the standard particle filter.

Key words: particle filter; weight degeneracy; particle flow filter; innovation error; Galerkin finite element method

0 引言

粒子滤波(Particle Filter, PF)是基于递推贝叶斯后验概率理论的一种序贯蒙特卡罗算法^[1],是一种基于蒙特卡罗模拟方法来实现贝叶斯滤波的算法。与卡尔曼滤波(Kalman Filter, KF)相比,粒子滤波不受系统模型与噪声的限制(不需要系统模型为线性,也不需要系统噪声为高斯分布),因此被广泛应用于视觉跟踪、目标定位导航、通信与信号处理等众多领域。

粒子滤波作为一种重要的非线性递归贝叶斯滤波方法,具有良好的算法可扩展性和普适性,然而粒子滤波仍然存在

一些理论、方法上的缺陷——权值退化^[2]与粒子多样性丧失问题。权值退化是序贯重要性采样(Sequential Importance Sampling, SIS)难以避免的问题,文献[3]中指出这是由于贝叶斯公式的函数相乘形式导致的。1993年,Gordon等引入重采样方法,基于同分布原则^[4],对权值更新后的粒子集合重新采样,获得一个粒子权值相等的新的粒子集,有效缓解了权值退化问题^[5];然而,对严重退化的粒子集进行无偏重采样所得到的粒子可能几乎全部源自极少数粒子的自我复制,造成粒子多样性丧失的问题。针对上述问题,国内外学者做了大量

收稿日期:2020-04-02;修回日期:2020-04-29;录用日期:2020-05-06。 基金项目:国家自然科学基金资助项目(61903281)。

作者简介:周德运(1994—),男,湖北咸宁人,硕士研究生,主要研究方向:状态估计、移动机器人实时定位与建图; 刘斌(1972—),女,吉林珲春人,教授,博士,主要研究方向:复杂系统建模、模式识别、智能系统、网络控制; 苏茜(1987—),女,湖北荆州人,讲师,博士,主要研究方向:多相流测试、故障诊断、信息处理。

的研究,主要集中在提议分布(重要性采样函数)的选取与重采样的优化中:文献[6]通过参考最新观测信息提出辅助粒子滤波器;文献[7]通过非线性高斯滤波器来获得近似后验,并以此作为提议分布,提出无迹粒子滤波器(Unscented Particle Filter, UPF);文献[8]提出混合多核偏最小二乘粒子滤波方法;文献[9]引入智能算法,将蝙蝠算法与粒子滤波相结合;文献[10]提出了基于似然分布调整的粒子群优化粒子滤波方法;文献[11]采用粒子滤波应用于多扩展目标跟踪,并提出顺序采样方法来解决维度灾难的问题;文献[12-13]提出粒子流滤波(Particle Flow Filter, PFF),以粒子流动的方式来计算贝叶斯公式。文献[13]中指出粒子流滤波器比经典粒子滤波器快了好几个数量级,而且对于复杂非线性问题比扩展卡尔曼滤波精确几个数量级。

本文在粒子流动过程中引入了“新息误差”结构 $\mathbf{Z}_{t_n} - \mathbf{h}(\mathbf{x}^i)$, \mathbf{Z}_{t_n} 为 t_n 时刻的观测值, $\mathbf{h}(\mathbf{x}^i)$ 为 t_n 时刻第 i 个粒子由测量函数得到的值,并从理论上证明了该结构的可行性。本文所提算法是基于归一化概率密度函数即完整形式的贝叶斯公式而不是文献[12]中未归一化的概率密度形式;在求解边值问题(Boundary Value Problem, BVP)时,利用 Galerkin 有限元法求得数值解,消除了拟合样本先验分布可能导致的数值不稳定使得后验分布产生较大的偏差的问题;最后对所提算法进行了仿真实验。实验结果显示,所提算法在提高滤波精度的同时提高了计算效率,并在机动目标跟踪情况下取得了较好的跟踪性能。

1 贝叶斯估计与粒子滤波

1.1 叶斯滤波

对于状态估计问题(定位、跟踪、动态参数)的状态空间模型可以描述为:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{w}_t) \\ \mathbf{x}_k = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}) \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \quad (2)$$

其中: t 表示连续时间, k 表示离散时间;状态 $\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^d$ 为连续、离散时间状态; $\mathbf{w}_t, \mathbf{w}_{k-1}$ 为过程噪声; $\mathbf{f}_t, \mathbf{f}_k$ 为连续、离散状态转移方程; $\mathbf{z}_k \in \mathbf{R}^m$ 为 k 时刻的观测值, \mathbf{h} 为观测方程, \mathbf{v}_k 为观测噪声。

贝叶斯滤波为非线性系统的状态估计问题提供了一种基于概率分布形式的解决方案。贝叶斯滤波包括预测和更新两个过程,假设 $k-1$ 时刻概率密度已知为 $p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{z}_{1:k-1})$, 预测过程即获取先验概率密度,由 Chapman-Kolmogorow 方程有:

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{z}_{1:k-1})d\mathbf{x}_{k-1} \quad (3)$$

然后,利用贝叶斯公式求解后验概率密度 $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k})$ 实现更新过程:

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k-1}) \cdot p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)}{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{z}_{1:k-1})} \quad (4)$$

其中: $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k})$ 为后验概率密度, $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k-1})$ 为先验概率密度, $p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)$ 为似然,分母 $p(\mathbf{z}_k|\mathbf{z}_{1:k-1})$ 为归一化常数:

$$p(\mathbf{z}_k|\mathbf{z}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k-1})p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)d\mathbf{x}_k \quad (5)$$

1.2 基本粒子滤波器

粒子滤波基于蒙特卡罗模拟方法,利用所求状态空间中大量的样本来近似状态后验分布,从而将积分问题转换为有限样本的求和问题。然而在实际计算中通常无法直接从后验分布中进行采样,因此需要引入一个易于采样的重要性函

数 $q(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{z}_{1:k})$ 生成采样样本,从而利用一组加权的样本 $\mathbf{x}_k = \{\mathbf{x}_k^i, w_k^i\}_{i=1}^N$ 来近似后验概率密度:

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_k^i \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^i) \quad (6)$$

其中: w_k^i 为粒子权值, $\delta(\cdot)$ 为狄拉克函数。理论上当粒子数目足够大,粒子的概率密度函数趋近真实状态后验概率密度,与此同时,粒子数目的增大会影响算法的性能及其复杂度。因此在保证一定精度的前提下,应尽量减少粒子数目^[14]。

式(6)中,权值更新公式为:

$$w_k^i = w_{k-1}^i \frac{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k^i)p(\mathbf{x}_k^i|\mathbf{x}_{k-1}^i)}{q(\mathbf{x}_k^i|\mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{z}_{1:k})} \quad (7)$$

对粒子权重进行归一化处理后即可用样本均值代替复杂的积分运算。式(3)~(7)即 SIS,文献[2]指出 SIS 存在严重的粒子权值退化现象。权值退化指滤波器经过多次迭代后,很多粒子的权重都变得很小(趋近于0),只有少数粒子(甚至一个)的权重比较大,并且粒子权值的方差随着时间增大,状态空间中的有效粒子数较少,大幅浪费计算资源。因此在 SIS 之后再进行一次重采样在一定程度上解决了这个问题,形成了常见的 SIR(Sampling Importance Resampling)粒子滤波器。

1.3 粒子流滤波器

粒子流滤波是将状态空间中服从先验分布的粒子移动到其对应的后验分布上,以粒子流动的方式代替贝叶斯公式实现贝叶斯滤波。粒子流滤波需要建立一个微分方程来平滑移动粒子,得到后验随时间变化的形式。

文献[12-13]中,忽略式(4)的分母获得未归一化的贝叶斯公式。为简化表达,此处以 $p(\mathbf{x})$ 表示后验概率密度 $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k})$, $g(\mathbf{x})$ 表示先验概率密度 $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k-1})$, $l(\mathbf{x})$ 表示似然 $p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)$, 则未归一化贝叶斯公式可以简化为:

$$p(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})l(\mathbf{x}) \quad (8)$$

对式(8)两端同时取对数并定义如下同伦函数:

$$\ln p(\mathbf{x}, \lambda) = \ln g(\mathbf{x}) + \lambda \ln l(\mathbf{x}) \quad (9)$$

假设贝叶斯滤波的粒子流满足 Itô 随机微分方程,在从先验到后验的变化过程中,状态 \mathbf{x} 的变化率 $\frac{d\mathbf{x}}{d\lambda}$ 可定义为:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) + \frac{d\mathbf{w}}{d\lambda} \quad (10)$$

式中: $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$ 为满足 Fokker-Planck 方程的函数, \mathbf{w} 为过程噪声,可以认为 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$ 为粒子从先验分布移动到后验分布的“速度场”。

不考虑噪声 \mathbf{w} , $p(\mathbf{x}, \lambda)$ 满足零扩散项的 Fokker-Planck 方程^[15],有式(11)成立:

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \lambda} = -\nabla \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)p(\mathbf{x}, \lambda)) \quad (11)$$

其中 $\nabla \cdot (\cdot)$ 表示 (\cdot) 的散度。对式(9)求 λ 偏导,并结合式(11),可得:

$$\ln l(\mathbf{x})p(\mathbf{x}, \lambda) = -\nabla \cdot (p(\mathbf{x}, \lambda)\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)) \quad (12)$$

由式(12)求出 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$ 后对式(10)进行0到1积分,将先验粒子平滑移动到后验分布上。其中, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$ 的求解是粒子流滤波中一个难点,文献[16]给出了 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$ 的17种求解方法。

2 改进粒子流滤波器

2.1 粒子流模型改进优化

与粒子流滤波不同的是,本文考虑归一化形式下的贝叶斯公式。在粒子流动过程中引入了“新息误差”结构,使用 Galerkin 有限元法求得 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$ 的弱形式解(数值解)。将式

(1)和(2)的滤波问题,重写为下列随机微分方程(Stochastic Differential Equation, SDE)形式:

$$dX_t = a(X_t)dt + dB_t \quad (13)$$

$$Z_{t_n} = h(X_{t_n}) + W_{t_n} \quad (14)$$

其中: $X_t \in \mathbf{R}^d$ 为 t 时刻的状态; Z_{t_n} 为 $t = t_n$ 时刻的观测值; $a(\cdot)$ 、 $h(\cdot)$ 为状态转移函数与测量函数; $\{B_t\}$ 为独立于 X 的 d 维标准维纳过程; W_{t_n} 是一个独立于 X 的 m 维变量,每个分量都服从高斯分布,协方差为 R 。通常将函数 $h(\cdot)$ 表示为列向量 $\mathbf{h} = (h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_m(\mathbf{x}))$,第 j 个元素表示为 h_j ,假设 \mathbf{h} 对 \mathbf{x} 可微。

定义 $p_n^*(\mathbf{x})$ 表示实际的后验, $p_n^{*-}(\mathbf{x})$ 表示实际的先验;同理定义 $p_n(\mathbf{x})$ 表示粒子后验, $p_n^-(\mathbf{x})$ 表示粒子的先验。定义映射 P^* 与 P 如下:

$$\begin{cases} p_n^*(\mathbf{x}) = P^*(p_{n-1}^*(\mathbf{x})) \\ p_n(\mathbf{x}) = P(p_{n-1}(\mathbf{x})) \end{cases} \quad (15)$$

2.2 求解映射 P^* 与 P

映射 P^* 与 P 可以分为两部分:第一部分为由 $n-1$ 时刻的后验通过状态方程得到 n 时刻的先验,即由 $p_{n-1}^*(\mathbf{x})$ 到 $p_n^{*-}(\mathbf{x})$ 、由 $p_{n-1}(\mathbf{x})$ 到 $p_n^-(\mathbf{x})$,两者是相同的;第二部分即由 n 时刻的先验得到后验,对于 P^* 第二部分由贝叶斯公式即式(4)得到,构造同伦函数:

$$p_n^*(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{p_n^{*-}(\mathbf{x}) \cdot l(\mathbf{x})^\lambda}{\int p_n^{*-}(\mathbf{x}) l(\mathbf{x})^\lambda d\mathbf{x}} \quad (16)$$

其中: $l(\mathbf{x})$ 为似然, $\lambda \in [0, 1]$ 。由式(16)可知同伦函数 $p_n^*(\mathbf{x}, \lambda)$ 定义了粒子从先验分布($\lambda = 0$)到后验分布($\lambda = 1$)的变化过程中的概率分布, $l(\mathbf{x})$ 表达式为:

$$l(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det R}} \exp\left\{-\frac{1}{2} [Z_{t_n} - \mathbf{h}(\mathbf{x})]^\top R^{-1} [Z_{t_n} - \mathbf{h}(\mathbf{x})]\right\} \quad (17)$$

对式(16)两端同时取对数:

$$\ln p_n^*(\mathbf{x}, \lambda) = \ln p_n^{*-}(\mathbf{x}) + \lambda \ln l(\mathbf{x}) - \ln \left[\int p_n^{*-}(\mathbf{x}) l(\mathbf{x})^\lambda d\mathbf{x} \right] \quad (18)$$

对式(18)两端对 λ 求偏导有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_n^*(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \lambda} &= p_n^*(\mathbf{x}, \lambda) \left[\ln l(\mathbf{x}) - \int p_n^*(\mathbf{x}, \lambda) \ln l(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] = \\ &= p_n^*(\mathbf{x}, \lambda) \left\{ \mathbf{h}^\top(\mathbf{x}) R^{-1} \left[Z_{t_n} - \frac{1}{2} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \right] - \right. \\ &= p_n^*(\mathbf{x}, \lambda) \mathbf{h}^\top(\mathbf{x}) R^{-1} \left[Z_{t_n} - \frac{1}{2} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \right] d\mathbf{x} + \\ &= \int p_n^*(\mathbf{x}, \lambda) C d\mathbf{x} - C \Big\} = \\ &= p_n^*(\mathbf{x}, \lambda) (\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{x}))^\top R^{-1} Z_{t_n} - \frac{p_n^*(\mathbf{x}, \lambda)}{2} \times \\ &= \mathbf{h}^\top(\mathbf{x}) R^{-1} \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \\ &= \frac{p_n^*(\mathbf{x}, \lambda)}{2} \int p_n^*(\mathbf{x}, \lambda) \mathbf{h}^\top(\mathbf{x}) R^{-1} \mathbf{h}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (19)$$

其中: $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) = \int p_n^*(\mathbf{x}, \lambda) \mathbf{h}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$; $C = \frac{1}{2} Z_{t_n}^\top R^{-1} Z_{t_n} + \ln \sqrt{(2\pi)^d \det R}$ 为与状态变量 \mathbf{x} 无关的常量,故 $\int p_n^*(\mathbf{x}, \lambda) \times C d\mathbf{x} - C = 0$ 。

式(19)即映射 P^* 的第二部分,接下来求映射 P 的第二部

分,由式(11)有:

$$\frac{\partial p_n(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \lambda} = -\nabla \cdot (f(\mathbf{x}, \lambda) p_n(\mathbf{x}, \lambda)) \quad (20)$$

注意到式(19)的表达形式,将 $f(\mathbf{x}, \lambda)$ 分为包含最新观测 Z_{t_n} 与不包含最新观测两部分。

引入新息误差,令:

$$f(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{K}(\mathbf{x}, \lambda)(Z_{t_n} - \mathbf{h}(\mathbf{x})) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, \lambda) \quad (21)$$

其中 $\mathbf{K}(\mathbf{x}, \lambda)$ 、 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \lambda)$ 满足连续二次可微,且满足边界条件:

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \pm\infty} \mathbf{K}(\mathbf{x}, \lambda) p_n(\mathbf{x}, \lambda) &= 0 \\ \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \pm\infty} \mathbf{v}(\mathbf{x}, \lambda) p_n(\mathbf{x}, \lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

式中: $\mathbf{K}(\mathbf{x}, \lambda)$ 为 $d \times m$ 矩阵,可以表示为 $\mathbf{K} = [\nabla \varphi_1, \nabla \varphi_2, \dots, \nabla \varphi_m]$, ∇ 表示微分算子, $\nabla \varphi_j$ 表示 φ_j 的梯度; $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \lambda)$ 为 $d \times 1$ 矩阵。为简化表达,用 p_n 、 \mathbf{K} 、 \mathbf{v} 表示 $p_n(\mathbf{x}, \lambda)$ 、 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \lambda)$ 、 $\mathbf{K}(\mathbf{x}, \lambda)$,故式(20)可以写为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_n}{\partial \lambda} &= -\nabla \cdot (p_n \mathbf{K}) Z_{t_n} - \nabla \cdot (p_n \mathbf{v}) + \\ &= \nabla \cdot (p_n \mathbf{K}) \mathbf{h}(\mathbf{x}) + p_n Q \end{aligned} \quad (23)$$

其中 $Q = \sum_{j=1}^m \nabla \varphi_j \cdot \nabla h_j$,令式(23)与式(19)相等,可得:

$$\nabla \cdot (p_n \mathbf{K}) = -p_n (\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}})^\top R^{-1} \quad (24)$$

式中, $\mathbf{K}(\mathbf{x}, \lambda)$ 为式(22)、(24)BVP方程的解。同理, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \lambda)$ 满足下列BVP方程:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (p_n \mathbf{v}) = -(D - Q) p_n \\ \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \pm\infty} \mathbf{v}(\mathbf{x}, \lambda) p_n(\mathbf{x}, \lambda) = 0 \end{cases} \quad (25)$$

式(25)中, $D = \frac{1}{2} \left[\int p_n \mathbf{h}^\top R^{-1} \mathbf{h} d\mathbf{x} + \mathbf{h}^\top R^{-1} \mathbf{h} \right] - \hat{\mathbf{h}}^\top R^{-1} \hat{\mathbf{h}}$,将式(24)、(25)代入式(23)有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_n}{\partial \lambda} &= p_n (\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}})^\top R^{-1} Z_{t_n} - \frac{p_n}{2} \mathbf{h}^\top R^{-1} \mathbf{h} + \\ &= \frac{p_n}{2} \int p_n \mathbf{h}^\top R^{-1} \mathbf{h} d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (26)$$

式(26)与式(19)具有相同的表达形式,由此可知在先验 $p_n^{*-} = p_n^-$ 相等的情况下映射 P 、 P^* 是相同的,即后验 $p_n^* = p_n$ 。结合式(21)与式(13)有:

$$\begin{aligned} dX_t^i &= a(X_t^i)dt + dB_t^i + \mathbf{K}(X_t^i, \lambda)(Z_{t_n} - \mathbf{h}(X_t^i))d\lambda + \\ &= \mathbf{v}(X_t^i, t) d\lambda \end{aligned} \quad (27)$$

由式(27)可知,本文提出的改进粒子流滤波引入了“新息误差”结构 $Z_{t_n} - \mathbf{h}(X_t^i)$,粒子流在求解 $f(\mathbf{x}, \lambda)$ 时得到的弱形式解与观测方程有关涉及 $(Z_{t_n} - \mathbf{h}(X_t^i))^2$ 项。而且,本文提出的改进算法在求解BVP方程时未引入最新的观测,与粒子流滤波相比,一定程度上削弱了对观测的依赖性。

2.3 求解BVP方程

对于固定时刻 t 有 $\mathbf{K} = [\nabla \varphi_1, \nabla \varphi_2, \dots, \nabla \varphi_m]$,求解BVP方程(24),其弱形式解可定义如下,对任意一阶可微函数(测试函数)满足式(28):

$$E[\Phi(\mathbf{x}, \lambda) \psi(\mathbf{x})] = E[\nabla \varphi_j(\mathbf{x}, \lambda) \cdot \nabla \psi(\mathbf{x})] \quad (28)$$

其中: $\Phi(\mathbf{x}, \lambda) = (h_j - \hat{h}_j)/R_{jj}$, R_{jj} 为观测中第 j 个元素的方差。

基于Galerkin有限元法可以用有限维空间中一组基函数的线性组合来近似 $\varphi_j(\mathbf{x}, \lambda)$:

$$\varphi_j(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{l=1}^L m_j^l \psi_l(\mathbf{x}) \quad (29)$$

其中: $\{\psi_l(\mathbf{x})\}_{l=1}^L$ 为空间中的一组基函数, $\{m_j^l\}_{l=1}^L$ 为该组基

函数下对应的坐标。令 $\mathbf{k}_j = \nabla \varphi_j(\mathbf{x}, \lambda)$, $\mathbf{m}_j = [m_j^1, m_j^2, \dots, m_j^L]^T$, 故 \mathbf{k}_j 可以表示为:

$$\mathbf{k}_j = \sum_{l=1}^L m_j^l \nabla \psi_l(\mathbf{x}) \quad (30)$$

故式(28)可以表示为:

$$\sum_{l=1}^L m_j^l E[\nabla \psi_l(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi(\mathbf{x})] = E[\Phi(\mathbf{x}, \lambda) \psi(\mathbf{x})] \quad (31)$$

将式(31)中的 $\psi(\mathbf{x})$ 由 $\psi_l(\mathbf{x})$ 替换, 令 $L = d$, 则式(31)可以表示为由 d 个方程组成的线性矩阵方程 $\mathbf{A} \mathbf{m}_j = \mathbf{b}$, A_{sl} 表示 \mathbf{A} 中第 s 行 l 列元素, \mathbf{b} 中第 s 个元素表示为 b_s , 故 \mathbf{A} 、 \mathbf{b} 可以表示为:

$$A_{sl} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \nabla \psi_l^i \cdot \nabla \psi_s^i \quad (32)$$

$$b_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^L \Phi(\mathbf{x}, \lambda) \psi_s^i \quad (33)$$

通过选择状态变量作为基函数, 即 $\{\psi_l(\mathbf{x})\}_{l=1}^d = \{\mathbf{x}_l\}_{l=1}^d$ 可以得到:

$$\nabla \psi_l = [\mathbf{0}_{1 \times (l-1)} \quad 1 \quad \mathbf{0}_{1 \times (d-l)}]^T \quad (34)$$

结合式(32)与(34)可知, $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ 为一个单位阵, 即可以得到 $\mathbf{m}_j = \mathbf{b}$ 。

由式(30)可知:

$$\mathbf{k}_j = \mathbf{m}_j = E(\Phi(\mathbf{x}, \lambda) \mathbf{x}) = E((h_j - \hat{h}_j) \mathbf{x} / R_j) \quad (35)$$

由式(35)可以得到 $\mathbf{K}(\mathbf{x}, \lambda)$ 为:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}, \lambda) = E(\mathbf{x}^i (h(\mathbf{x}^i) - \hat{h}) \mathbf{R}^{-1}) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}^i (h(\mathbf{x}^i) - \hat{h})^T \mathbf{R}^{-1} \quad (36)$$

同理可得 BVP 方程式(25)的解:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (D - Q) \mathbf{x}^i \quad (37)$$

2.4 改进粒子流滤波算法步骤

综上所述, 改进的粒子流滤波算法步骤如下:

步骤1 初始化, 从初始分布 $p^*(0)$ 中采样 N 个样本;

步骤2 从 $t = 1$ 到 $t = T$, 执行步骤3~步骤5;

步骤3 由式(13)~(14)产生先验样本 \mathbf{x}_t^{i-} 与观测 Z_t^i ;

步骤4 $\lambda = 0$, 执行映射 P ;

1) 如果 $\lambda \leq 1$;

2) 计算: $\hat{h}(\mathbf{x}_t^{i-}) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(\mathbf{x}_t^{i-})$;

3) 计算新息误差 $\mathbf{Ie} = (Z_t^i - h(\mathbf{x}_t^{i-}))$, 式(36)、(37);

4) 计算粒子状态值 $\mathbf{x}_t^{i-} = \mathbf{x}_t^{i-} + (\mathbf{K} \mathbf{I} + \mathbf{v}) \Delta \lambda$;

5) 令 $\lambda = \lambda + \Delta \lambda$, 返回1);

步骤5 计算状态估计值 $\mathbf{X}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_t^{i-}$

步骤6 $t = t + 1$, 返回步骤3。

3 实验仿真结果与分析

3.1 一维非线性滤波模型

选择非线性一维系统的状态方程为:

$$\mathbf{x}(k) = 1 + \sin(0.04\pi k) + 0.5\mathbf{x}(k-1) + w(k) \quad (38)$$

$$\mathbf{z}(k) = \begin{cases} 0.2\mathbf{x}^2(k) + v(k), & k \leq 30 \\ -2 + 0.5\mathbf{x} + v(k), & k > 30 \end{cases} \quad (39)$$

其中: $w(k)$ 、 $v(k)$ 符合高斯分布, 均值为0、方差为 Q 、 R 。

用粒子滤波、粒子流与本文提出的改进的粒子流滤波算法对该非线性系统进行状态估计和跟踪。由于粒子滤波结果存在随机性, 进行30次蒙特卡洛仿真。选择性能指标为均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE):

$$I_{\text{RMSE}} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x_{\text{true}} - \hat{x})^2} \quad (40)$$

取粒子数 $N = 50$, 仿真时长 $T = 50$, 粒子流与改进粒子流取相同时间步长 $\Delta \lambda$ 。表1为在 R 、 Q 、 $\Delta \lambda$ 在不同设定下, 状态估计偏差和运行时间的对比。当 $Q = 0.1$ 、 $R = 0.1$ 时, 仿真结果如图1(a)所示; 当 $Q = 1$ 、 $R = 0.1$ 时, 仿真结果如图1(b)所示。

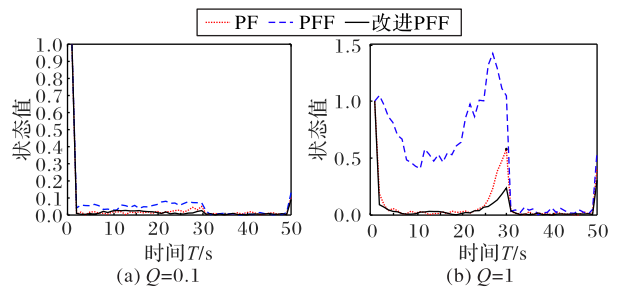


图1 Q 为0.1或1时的状态估计均方根误差

Fig. 1 RMSE of state estimation with Q of 0.1 or 1

由图1可知, 当过程噪声较小时, 三种算法均可取得较好的结果; 在过程噪声较大时, 粒子流滤波效果较差。这是由于噪声较大时求得的 $f(\mathbf{x}, \lambda)$ 误差较大, 粒子滤波与改进粒子流滤波结果相对较好, 其中改进的粒子流滤波具有更高的精度。从表1可以看出, 当过程噪声与量测噪声都较大时, 改进粒子流滤波仍可取得较好的结果。

此外由表1可以看出, PFF与改进的PFF算法运行时间高于粒子滤波。PFF与改进的PFF算法运行时间取决于时间步长 $\Delta \lambda$, 当 $\Delta \lambda$ 相同时, 本文算法与粒子流算法运行时间相近。这是因为本文改进了“速度场” $f(\mathbf{x}, \lambda)$ 的结构, 提高了滤波精度的同时并没有增加计算量。

表1 三种算法仿真结果对比

Tab. 1 Comparison of simulation results of three algorithms

参数			RMSE			运算时间/s		
R	Q	$\Delta \lambda$	PF	PFF	改进 PFF	PF	PFF	改进 PFF
0.01	0.01	0.05	0.1415	0.1416	0.1462	0.0767	0.6025	0.6052
0.10	0.10	0.02	0.1435	0.1494	0.1427	0.0778	1.4878	1.4790
0.10	1.00	0.05	0.2012	0.6542	0.1582	0.0745	0.6122	0.6125

当 $N=50$, 过程噪声为伽马噪声 $w \sim \Gamma(3, 2)$ 时, 对比 PF、UPF、PFF、改进 PFF 算法, 仿真结果如图2所示。

由图2可知, 在过程噪声为伽马噪声情况下, PFF 算法无法进行较好的估计; 在测量噪声较大情况下, 改进 PFF 算法有

相对较好的效果; 在测量噪声较小时, UPF 与改进的 PFF 算法有较好的效果。文献[17]证明当观测噪声较为显著时, 基于最新观测优化的提议分布并不能带来更高的滤波精度。

由上述仿真实验可以看出, 粒子滤波、粒子流滤波、UPF

在过程噪声较小、观测信息比较精确时才更有效。原因是 PF 利用最新的观测信息计算权重, PFF、UPF 参考最新的观测信息来优化提议分布。另外利用智能算法、启发式算法与粒子滤波结合也是基于最新的观测, 然而多数方案缺乏坚实的理论证明, 且以增加计算复杂度为代价。其中与观测相关的项设为 $b = (Z_k - h(x_k))$, 粒子滤波在计算权重时是根据观测方程来计算的涉及 e^{b^2} 项; 粒子流在求解 $f(x, \lambda)$ 时, 得到的弱形式解涉及 b^2 项, 且弱形式解为数值解, 当噪声变大时得到的解的误差较大; 改进的粒子流滤波虽然也利用了最新的观测新息, 但是作为新息误差项而引入只涉及 b , 从而削弱了观测的影响。而且, BVP 方程求解也未引入最新观测, 一定程度上抑制了系统对观测的依赖性。

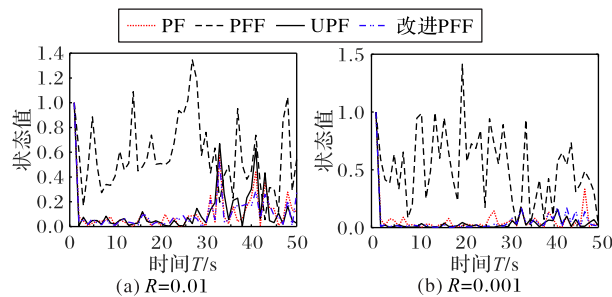


图2 不同噪声 R 下的状态估计均方根误差

Fig. 2 RMSE of state estimation under different noise R

3.2 机动目标跟踪模型

以单站单目标纯方位角度跟踪系统模型为例, 本文目标的机动模型为恒速度模型 (Constant Velocity, CV) 与恒转向模型 (Constant Turn, CT), 目标的状态为 $X(k) = [x_p(k), x_v(k), y_p(k), y_v(k)]^T$, 状态的 4 个分量分别代表 x 方向坐标、 x 方向速度、 y 方向坐标、 y 方向速度。目标的状态方程如下:

$$X(k+1) = \Phi X(k) + \Gamma w(k) \quad (41)$$

表2 两种算法跟踪性能比较

Tab. 2 Tracking performance comparison of two algorithms

参数	算法	RMSE				运行时间/s
		x_p	x_v	y_p	y_v	
$r_1 = 0.05, r_2 = 0.1$	PF	10.822 1	0.487 8	9.122 7	0.233 8	0.178 5
$N_1 = 50, N_2 = 50$	改进 PFF	1.764 4	0.054 2	2.894 5	0.092 1	0.110 8
$r_1 = 0.05, r_2 = 0.1$	PF	6.786 1	0.394 0	6.517 8	0.269 3	0.684 7
$N_1 = 200, N_2 = 50$	改进 PFF	2.458 8	0.113 8	1.158 8	0.134 4	0.109 1
$r_1 = 0.05, r_2 = 0.1$	PF	4.108 6	0.247 7	7.643 5	0.272 2	0.669 2
$N_1 = 200, N_2 = 200$	改进 PFF	1.278 8	0.192 8	3.569 2	0.163 2	0.416 5
$r_1 = 0.5, r_2 = 0.1$	PF	13.015 4	1.011 5	26.581 2	1.361 8	0.677 5
$N_1 = 200, N_2 = 50$	改进 PFF	8.304 2	0.543 0	9.693 5	0.443 3	0.108 2

由表2、图3可知在相同条件下, 改进的粒子流滤波具有更高的跟踪精度与计算效率。

从表2可以看出, 改进的粒子流滤波在粒子数为50时, 跟踪精度已高于粒子滤波在粒子数为200时的精度, 并且算法运行时间更短。这是因为在满足一定数值近似误差要求下, 蒙特卡罗近似所需的样本数随着状态维度的增加会急剧增加, 俗称维数灾难^[18], 而且高维状态空间的粒子权值更容易退化。在实验3.1节中, 改进粒子流滤波运行时间更长是因为在处理一维情况下粒子滤波运算效率高, 但在处理多维情况下粒子滤波运算时间将会大大增加。综合考虑滤波精度与运行时间, 改进的粒子流算法具有较高的综合性能。

$$Z(k) = \arctan \frac{y_p(k) - y_0}{x_p(k) - x_0} + v(k) \quad (42)$$

其中: $w(k)$ 、 $v(k)$ 为过程噪声与测量噪声, 且满足均值为零, 协方差为 Q 与 R 的高斯分布, (x_0, y_0) 为基站坐标。

在 CV 模型下状态转移矩阵为 Φ_{CV} , 在 CT 模型下为 Φ_{CT} , 目标初始状态为 $X(0) = [1000, 10, 1500, 15]^T$, $w(k) = [w_{xp}(k), w_{xv}(k), w_{yp}(k), w_{yv}(k)]^T$, 各参数值如下:

$$\Phi_{CV} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0.5T^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5T^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{CT} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(\omega T)}{\omega} & 0 & \frac{\cos(\omega T) - 1}{\omega} \\ 0 & \cos(\omega T) & 0 & \sin(\omega T) \\ 0 & \frac{1 - \cos(\omega T)}{\omega} & 1 & \frac{\sin(\omega T)}{\omega} \\ 0 & -\sin(\omega T) & 0 & \cos(\omega T) \end{bmatrix}$$

$$R = \pi/180$$

当粒子数都为 $N = 50$, 目标初始位置 $(x_0, y_0) = (1355.33, 1736.23)$ (随机取得)。由于粒子滤波存在随机性, 在上述条件下进行200次蒙特卡洛仿真。仿真时长为60 s, 采样周期为1 s, 系统距离的噪声方差为 $r_1 = 0.05$, 速度方差为 $r_2 = 0.1$ 。目标开始按照 CV 模型运动, 40 s 后按照 CT 模型以角速度 $\omega = 5^\circ/s$ 做匀转弯运动。选取性能指标为目标位置均方根误差, 仿真结果如表2、图3所示, 其中 N_1 、 N_2 分别表示 PF 与改进 PFF 粒子数。

$$e_{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T [(x_p(t) - x_{true}(t))^2 + (y_p(t) - y_{true}(t))^2]} \quad (43)$$

另外, 从表2可以看出, 在过程噪声变大的情况下, 粒子滤波已经不能较好地反映真实的轨迹, 误差已经比较大, 而改进的粒子流滤波依然能相对较好地反映真实的轨迹, 各状态估计的误差保持在相对较小的范围内, 证明本文算法具有较好的鲁棒性。另外粒子滤波在粒子数增大的情况下滤波精度有明显提高, 而改进的粒子流滤波在粒子数增加的情况下滤波精度并没有提高, 这是由于改进的算法避免了重采样对粒子的舍弃, 而粒子数较多时, 会导致低似然区域的粒子增加。这也说明了改进的粒子流算法适用于粒子数较少时的高精度快速预测, 例如激光雷达、红外目标跟踪等。

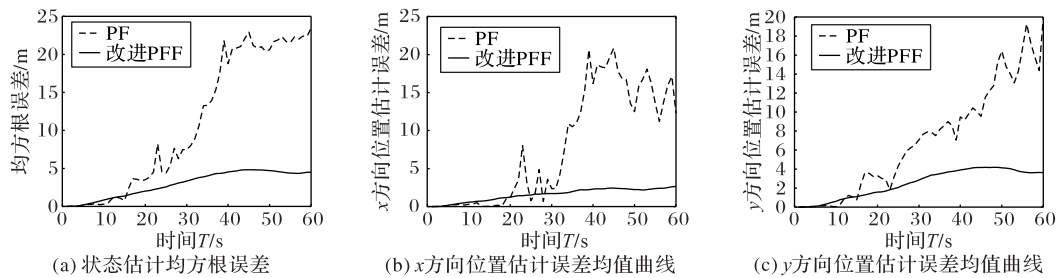


图3 PF和改进PFF的仿真结果比较

Fig. 3 Comparison of simulation results of PF and improved PFF

4 结语

本文在粒子流动过程中引入了新息误差,构造了一种与卡尔曼滤波相似的结构。与基于最新观测信息优化粒子滤波的方法相比在一定程度上削弱了对观测的依赖性,在观测误差较大情况下也有相对较好的结果。由于算法过程中利用粒子流动形式实现贝叶斯公式以及未进行重采样,故不存在粒子权值退化问题与粒子多样性丧失问题。实验结果表明,本文提出的改进方法,在提高状态估计精度的同时,在处理多维情况下运算效率更高,具有较高的综合性能。本文在求解BVP方程时并未对其解析解进行分析,下一步研究方向是如何求得解析解及其满足的条件以及如何获得更优的数值解,提高滤波精度。

参考文献 (References)

- [1] WEISS G. Book review: Monte Carlo methods by Hammersley J. M. and Handscomb D. C. [J]. Physics Today, 1965, 18(2):55-56.
- [2] LI T, SUN S, SATTAR T P, et al. Fight sample degeneracy and impoverishment in particle filters: a review of intelligent approaches [J]. Expert Systems with Applications, 2014, 41(8): 3944-3954.
- [3] RISTIC B, ARULAMPALAM S, GORDON N. Beyond the Kalman Filter — book review [J]. IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, 2004, 19(7):37-38.
- [4] LI T, VILLARRUBIA G, SUN S, et al. Resampling methods for particle filtering: identical distribution, a new method, and comparable study [J]. Frontiers of Information Technology and Electronic Engineering, 2015, 16(11): 969-984.
- [5] 李天成, 范红旗, 孙树栋. 粒子滤波理论、方法及其在多目标跟踪中的应用 [J]. 自动化学报, 2015, 41(12): 1981-2002. (LI T C, FAN H Q, SUN S D. Particle filtering: theory, approach, and application for multitarget tracking [J]. Acta Automatica Sinica, 2015, 41(12): 1981-2002.)
- [6] PITT M K, SHEPHARD N. Filtering via simulation: auxiliary particle filters [J]. Journal of the American Statistical Association, 1999, 94(446): 590-591.
- [7] VAN DER MERWE R, DOUCET A, DE FREITAS N, et al. The unscented particle filter [C]// Proceedings of the 13th International Conference on Neural Information Processing Systems, 2001: 563-569.
- [8] KUMAR K M, VELAYUDHAM A, KANTHAVEL R. An efficient method for road tracking from satellite images using hybrid multi-kernel partial least square analysis and particle filter [J]. Journal of Circuits Systems and Computers, 2017, 26(11): No. 1750181.
- [9] 陈志敏, 吴盘龙, 薄煜明, 等. 基于自控蝙蝠算法智能优化粒子滤波的机动目标跟踪方法 [J]. 电子学报, 2018, 46(4): 886-894. (CHEN Z M, WU P L, BO Y M, et al. Adaptive control bat algorithm intelligent optimization particle filter for maneuvering target tracking [J]. Acta Electronica Sinica, 2018, 46(4): 886-894.)
- [10] 高国栋, 林明, 许兰. 基于似然分布调整的粒子群优化粒子滤波新方法 [J]. 计算机应用, 2017, 37(4): 980-985. (GAO G D, LIN M, XU L. New PSO particle filter method based on likelihood-adjustment [J]. Journal of Computer Applications, 2017, 37(4): 980-985.)
- [11] 韩玉兰, 韩崇昭. 非线性系统的多扩展目标跟踪算法 [J]. 计算机应用, 2019, 39(5): 1318-1324. (HAN Y L, HAN C Z. Multiple extended target tracking algorithm for nonlinear system [J]. Journal of Computer Applications, 2019, 39(5): 1318-1324.)
- [12] DAUM F, HUANG J, NOUSHIN A. Exact particle flow for nonlinear filters [C]// Proceedings of the SPIE 7697: Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition XIX. Bellingham, WA: SPIE, 2010: No. 769704.
- [13] DAUM F, HUANG J. Nonlinear filters with particle flow induced by log-homotopy [C]// Proceedings of the SPIE 7336: Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition XVIII. Bellingham, WA: SPIE, 2009: No. 733603.
- [14] CLOSAS P, FERNÁNDEZ-PRADES C. Particle filtering with adaptive number of particles [C]// Proceedings of the 2011 Aerospace Conference. Piscataway: IEEE, 2011: 1-7.
- [15] DAUM F, HUANG J. Particle flow with non-zero diffusion for nonlinear filters [C]// Proceedings of the SPIE 8857: Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition XXII. Bellingham, WA: SPIE, 2013: No. 88570A.
- [16] DAUM F, HUANG J. Exact particle flow for nonlinear filters: seventeen dubious solutions to a first order linear underdetermined PDE [C]// Proceedings of the 2010 Conference Record of the Forty Fourth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. Piscataway: IEEE, 2010: 64-71.
- [17] LI T, CORCHADO J M, BAJO J, et al. Effectiveness of Bayesian filters: an information fusion perspective [J]. Information Sciences, 2016, 329:670-689.
- [18] ADES M, VAN LEEUWEN P J. An exploration of the equivalent weights particle filter [J]. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 2013, 139(672): 820-840.

This work is partially supported by the National Natural Science Foundation of China (61903281).

ZHOU Deyun, born in 1994, M. S. candidate. His research interests include state estimation, mobile robot Simultaneous Localization and Mapping (SLAM).

LIU Bin, born in 1972, Ph. D., professor. Her research interests include complex system modeling, pattern recognition, intelligent system, network control.

SU Qian, born in 1987, Ph. D., lecturer. Her research interests include multiphase flow testing, fault diagnosis, information processing.