

文章编号:1001-9081(2005)10-2356-03

## 基于快速基追踪算法的图像去噪

汪雄良, 王正明

(国防科学技术大学理学院, 湖南长沙 410073)

(wxliang74619@163.com)

**摘要:** 针对基追踪方法中线性规划算法计算量大的难题, 考虑了一类可分离的信号表示形式, 分别在图像的行和列的方向上构造相应的字典, 由此降低了字典的维数, 并将一个二维问题转化为两个一维问题来处理, 最后利用一种新的迭代算法进行求解, 从而加快了计算速度。实验结果表明, 改进的基追踪方法能够快速稳定实现, 同时具有较好的去噪效果。

**关键词:** 基追踪; 图像; 字典; 去噪

**中图分类号:** TP391.41    **文献标识码:**A

### Image de-noising based on fast basis pursuit algorithm

WANG Xiong-liang, WANG Zheng-ming

(Institute of Science, National University of Defence Technology, Changsha Hunan 410073, China)

**Abstract:** Aiming at the hardship to solve one kind large-scale linear programming problem of Basis Pursuit, certain kind form of separable signal representation was considered. We construct dictionaries in column-wise and row-wise of the image, the dimension of the dictionary was greatly reduced. Then two-dimension problem was turning into two one - dimension problem. Finally, one new iterative method was presented to solve this problem. Thus the limitation of computation burden is well solved. Experiment results demonstrate that Basis Pursuit can be implemented speedy and stably, it can provide well de - noising results at the same time.

**Key words:** basis pursuit; image; dictionary; de-nosing

## 0 引言

基追踪方法<sup>[1~4]</sup>是信号稀疏表示领域的一种新方法。它寻求从完备的(过完备)函数(基)集合中得到信号的最稀疏的表示, 即用尽可能少的基尽可能精确地表示原信号, 从而获得信号的内在本质特性。基追踪方法采用表示系数的范数作为信号表示稀疏性的度量, 通过最小化  $l_1$  范数将信号稀疏表示问题定义为一类有约束的极值问题, 进而转化为线性规划问题进行求解。

目前, 基追踪方法在一维信号处理领域有很好的应用<sup>[1~3]</sup>。尽管使用了一种新的线性规划算法——内点算法<sup>[1]</sup>, 基追踪方法由于要在所有的字典向量中极小化一个全局目标函数, 其计算量仍然是很大的。正因为求解大尺度线性规划问题的困难, 目前的基追踪方法仅在一维信号去噪和超分辨率方面有很好的结果。对于信号长度为 N 的一维信号, 使用小波包和局部余弦字典, 采用内点算法需要  $O(N^{3.5} \log^{3.5} N)$  次运算, 即使使用快速小波包和局部余弦变换, 当  $N \geq 1000$  时, 算法也不能执行<sup>[4]</sup>。

将基追踪方法应用于图像处理的主要困难是图像所固有的高维特性( $N \times N$  的图像向量化后为  $N^2 \times 1$  的向量), 因此寻求最小化  $l_1$  范数的解实质上是要求解一类大尺度的优化问题, 由此带来计算量是巨大的。文献[5]提出了一种基于组合变换的不含噪图像稀疏分解方法并应用于图像编码和压缩, 继承和发展了基追踪方法的核心思想——同样是寻求最

小化  $l_1$  范数的解, 所不同的是构造了一种新的目标函数。文献[5]对于  $64 \times 64$  的图像进行稀疏分解, 在配置为 SGI Power Challenger Server(CPU 为 196MHZ) 上耗时 50 个小时。

基于基追踪方法的核心思想, 结合对基追踪求解算法的改进, 本文将基追踪方法的应用扩展到图像去噪问题上来。

## 1 优化问题及字典选择

对于观测到的离散信号  $s \in H$ ,  $H$  为 Hilbert 空间, 给定  $H$  中的字典  $\phi = \{\phi_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ , 其中  $\Gamma$  为指标集,  $\phi_\gamma$  为  $H$  中的基函数, 也称为原子。基追踪方法将信号稀疏表示问题定义为以下有约束的极值问题<sup>[1]</sup>, 即:

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_1 \text{ subject to } s = \sum_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma \phi_\gamma \quad (1)$$

其中,  $\alpha_\gamma (\gamma \in \Gamma)$  为表示系数。如果我们将字典中的向量表示成矩阵  $\phi$  的列, 系数表示成一个列向量, 则(1)式可表示成:  $\min_{\alpha} \|\alpha\|_1 \text{ subject to } s = \phi \alpha$  (2)

在含噪观测的情况下, 考虑如下模型:

$$y = s + \sigma z$$

其中为  $s$  真实信号,  $y$  为观测信号,  $z$  为标准高斯白噪声,  $\sigma$  为噪声根方差。基追踪方法去噪归结为求解以下优化问题<sup>[1,6]</sup>:

$$\min_{\alpha} \frac{1}{2} \|y - \phi \alpha\|_2^2 + \lambda \|\alpha\|_1 \quad (3)$$

以上最优化问题致力于最小化信号重建误差, 同时使得信号的表示最稀疏。正则化参数  $\lambda$  控制着允许误差与稀疏性

收稿日期: 2005-04-29; 修订日期: 2005-07-09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60272013); 全国优秀博士论文作者专项基金资助项目(200140)

作者简介: 汪雄良(1974-), 男, 湖北黄梅人, 博士研究生, 主要研究方向:SAR 图像处理、数据融合等; 王正明(1962-), 男, 湖南长沙人, 教授, 博士生导师, 主要研究方向: 数据融合、图像处理等。

之间的平衡。

由(3)式可见, 基追踪方法去噪的核心问题涉及到: 1) 原子  $\phi_y$  的选取; 2) 字典  $\phi = \{\phi_y, y \in \Gamma\}$  的构造; 3) 求解算法设计等三个方面。其中, 字典的构造是基追踪方法中的核心环节。为了尽可能精确地表示信号, 字典与信号应该是自适应的, 或者说字典是从对信号的学习中得到的。通常, 基追踪方法所使用的字典有完备的、超完备的、可列的、欠完备的、合成的等等<sup>[1]</sup>。我们可以根据利用信号的先验信息及实际需要设计字典。所设计的字典一般是完备或超完备的。本文所采用的字典主要有:

### 1) Heaviside 字典

$$\gamma \in \{1, 2, \dots, n\}, \phi_\gamma(t) = 1_{\{t \geq r\}}$$

$$\Rightarrow \phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

此字典中原子不是正交的, 但是对于任意长度为  $n$  的一维离散信号  $s = (s_1 \ s_2 \ \cdots \ s_n)$  都有表示:

$$s = s_1 \phi_1 + \sum_{\gamma=2}^n (s_\gamma - s_{\gamma-1}) \phi_\gamma$$

Heaviside 字典具有上三角形式, 结构简单, 善于捕捉信号中的突变特征。

### 2) 时间—尺度字典(小波字典)

我们以 Haar 小波字典为例:

$$\text{父小波基: } \varphi = 1_{[0,1]}, \text{母小波基: } \psi = 1_{[1/2,1]} - 1_{[0,1/2]}$$

Haar 小波字典中包含母小波基的平移和伸缩变换以及父小波基的平移变换。

设  $\gamma = (a, b, v)$  其中  $a \in (0, \infty)$  为尺度变量,  $b \in [0, n]$  表征位置,  $v \in \{0, 1\}$  表征性别。Haar 小波字典形式为:

$$\phi_{(a,b,1)} = \psi(a(t-b)).\sqrt{a}$$

$$\phi_{(a,b,0)} = \varphi(a(t-b)).\sqrt{a}$$

对于完备的 Haar 小波字典而言, 指标集为:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{Haar}} = & \\ & \left\{ (a_j, b_{j,k}, 1) : j = j_0, \dots, \log_2(n) - 1, k = 0, \dots, 2^j - 1 \right\} \\ & \left\{ (a_{j_0}, b_{j_0}, 0) : k = 0, \dots, 2^{j_0} - 1 \right\} \end{aligned}$$

其中,  $2^{j_0}$  对应最粗的尺度。以上指标集包含  $n$  个原子, 构成一组正交基。当然还有其他类型的小波字典, 尽管有些小波基没有类似 Haar 小波基这样明确的小波函数表示式, 但它们的字典都有与 Haar 小波字典类似的离散的结构。比较常用的小波字典主要有“Daubechies”, “Coiflet”, “Symmlet” 等等<sup>[1]</sup>。小波字典适用于表示图像中分片光滑的部分。

### 3) Heaviside 字典 + 小波字典

对于比较复杂的复合信号, 单一的字典下无法得到信号的最稀疏表示, 此时我们可将几种字典合成起来, 从而得到过完备的字典。比如 Heaviside 字典 + 小波字典。对于实际中的自然图像稀疏表示问题, 通常需要构造合成的字典。

## 2 信号的可分离表示形式

需要指出的是上文所讨论的基追踪方法的字典构造以及优化问题的推导都是针对一维信号而得出的。对于二维图像信号, 需要将它拉直成一维列向量, 再运用基追踪方法进行去噪处理。对于  $n \times n$  的图像, 拉直成  $n^2 \times 1$  的列向量, 则相应的完备字典维数为  $n^2 \times n^2$ 。当  $n = 100$  时, 字典维数为  $10000 \times 10000$ , 已超出 Matlab 软件所能分配的最大数据内存。因此,

按照这种常规的处理图像信号, 只能处理很小的图像, 这样就极大地限制了基追踪方法在二维图像处理的应用。下面, 我们考虑图像信号在两类情形下的表示方法。

情形 1: 图像满足行和列方向的对称性质。这种情形只针对于一类简单的合成图像, 如本文图 1 所示。此时可依据一维信号的基追踪方法对图像按行和列的方向分别处理。

情形 2: 我们假定原始图像信号形式为:

$$f(i,j) = \sum_k \sum_l \alpha_{k,l} \psi_{k,l}(i,j) \quad (4)$$

若  $\psi_{k,l}(i,j)$  为可分离变量的形式, 即  $\psi_{k,l}(i,j) = \psi_k(i)\psi_l(j)$ 。则(1)式变为:

$$\begin{aligned} f(i,j) &= \sum_k \sum_l \alpha_{k,l} \psi_{k,l}(i,j) \\ &= \sum_k \alpha_{k,l} \psi_k(i) \psi_l(j) \\ &= \sum_k \psi_k(i) \left( \sum_l \alpha_{k,l} \psi_l(j) \right) \end{aligned} \quad (5)$$

记  $G(k,j) = \sum_l \alpha_{k,l} \psi_l(j)$ ,  $G = \alpha \psi_y$ , 其中  $\psi_y(l,j) = \psi_l(j)$ 。记  $\psi_x(k,i) = \psi_k(i)$ , 则:

$$\begin{aligned} f(i,j) &= \sum_k \psi_x(k,i) G(k,j) \\ &= \sum_k \psi_x^T(i,k) G(k,j) \end{aligned} \quad (6)$$

则:

$$f = \psi_x^T G = \psi_x^T \alpha \psi_y \quad (7)$$

由(7)可知, 在对信号进行稀疏表示的过程中, 可先利用关系式  $f = \psi_x^T G$  求解得到  $G$ , 再根据  $G^T = \psi_y^T \alpha^T$  求解得到  $\alpha^T$ , 即可得到  $\alpha$  的估计  $\hat{\alpha}$ 。

对于这种情形下的图像去噪问题, 我们可先构造行方向的字典  $\psi_x^T$ , 依据  $f = \psi_x^T G$ , 对图像矩阵的每一列进行类似一维信号的基追踪去噪处理, 得到  $G$ ; 构造列方向的字典  $\psi_y^T$ , 依据  $G^T = \psi_y^T \alpha^T$ , 对  $G$  的每一行进行类似一维信号的基追踪去噪处理, 得到  $\alpha^T$ , 即可得到  $\alpha$  的估计  $\hat{\alpha}$ 。

## 3 新的求解算法

文献[1] 将(3)式等价于如下二次规划问题:

$$\min c^T x + \frac{1}{2} \|p\|^2 \text{ subject to } Ax + \delta p = b, x \geq 0, \delta = 1$$

其中,  $\alpha \equiv u - v, u, v \geq 0, x \Leftrightarrow (u, v), A \Leftrightarrow (\phi, -\phi), c \Leftrightarrow \lambda(I, I), b \Leftrightarrow \sigma \sqrt{2 \log(p)}$ 。其中  $p$  为字典的势。

文献[1] 采用内点算法求解以上二次规划问题。这种算法收敛性能稳定, 但由于它是一种大尺度的线性规划算法, 算法复杂度高, 所耗费的计算时间非常长, 不便于实际应用。为此, 先依据上文的讨论, 考虑利用信号的可分离变量表示, 分别在图像的行和列的方向上构造相应的字典, 从而大大降低了字典的维数, 然后我们采用一种新的迭代算法来求解以上最优化问题。

首先, 我们给出  $l_1$  范数的平滑近似<sup>[7]</sup>:

$$\|z\|_1 \approx \sum_{i=1}^N (|(z)_i|^2 + \varepsilon)^{1/2} \quad (8)$$

其中,  $N$  为向量  $z$  的长度,  $\varepsilon > 0$  为非常小的常数(本文取  $\varepsilon = 10^{-6}$ )。

令:

$$J(\alpha) = \frac{1}{2} (y - \phi\alpha)^H (y - \phi\alpha) + \lambda \sum_{i=1}^N (|\alpha_i|^2 + \varepsilon)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} (\gamma^H \gamma - \gamma^H \phi \alpha - \alpha^H \phi \gamma + \alpha^H \phi^H \phi \alpha) + \lambda \sum_{i=1}^N (|\alpha_i|^2 + \varepsilon)^{1/2} \quad (9)$$

由  $\nabla J(\alpha) = 0$ , 得到:

$$(\phi^H \phi + \lambda I_1(\alpha)) \alpha = \phi^H \gamma \quad (10)$$

其中,  $I_1(\alpha) = \text{diag}(|\alpha_i|^2 + \varepsilon)^{-1/2}$ 。迭代求解(10), 迭代式如下:

$$\hat{\alpha}^{(n+1)} = \beta(\phi^H \phi + \lambda I_1(\hat{\alpha}^{(n)}))^{-1} \phi^H \gamma + (1 - \beta) \hat{\alpha}^{(n)} \quad (11)$$

其中,  $\beta$  为迭代步长,  $0 < \beta \leq 1$ , 迭代初值可取  $\hat{\alpha}^{(0)} = \phi^H \gamma$ 。迭代的终止条件由  $\|\hat{\alpha}^{(n+1)} - \hat{\alpha}^{(n)}\|_2^2 / \|\hat{\alpha}^{(n)}\|_2^2 < \delta_{CG}$  控制(本文取  $\delta_{CG} = 10^{-3}$ ), 这样即可得到优化问题的解  $\hat{\alpha}$ 。再由  $\hat{s} = \phi \hat{\alpha}$  即可得到重构的图像信号。

在所考虑的噪声为高斯白噪声以及对字典  $\phi$  进行规范化( $\|\phi_y\|_2 = 1$ )的情况下, 文献[1]中  $\lambda$  的经验值取为  $\lambda = \sigma \sqrt{2 \log(P)}$ , 其中,  $P$  为字典  $\phi$  的势。此经验值实际上对应于正交基下小波去噪方法中的软阈值<sup>[1,8]</sup>。因此这种参数的选取方法依赖于对信号中的噪声方差的精确估计。而在实际问题中对噪声方差的精确估计通常是比较困难的。因此该经验值是一种次优值。在  $\phi^H \phi > 0$  的条件下, 容易证明: 目标函数具有单峰性质(目标函数为凸函数)。因此可在迭代算法中用线性搜索的方法寻求最优的  $\lambda$ 。

## 4 实验结果

为了验证本文方法的去噪效果, 我们将其应用于图像去噪实验, 并与小波软、硬阈值去噪方法以及 Wiener 滤波方法进行了比较。

1) 首先仿真产生如下灰度图像(中间白块部分幅度为 2, 其他部分为 0), 对原图像附加  $\sigma = 0.5$  的高斯白噪声, 我们构造 Heaviside 字典, 对图像按行和列的方向分别处理, 利用新的迭代算法进行快速求解, 最后得到去噪后的图像。我们还应用小波软、硬阈值去噪方法、Wiener 滤波方法分别进行去噪实验, 得到处理结果如图 1 所示。

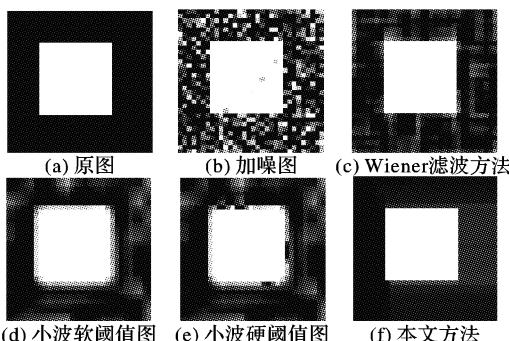


图 1 分片常数灰度图像去噪结果

表 1 信噪比比较(单位: dB)

SNR	含噪信号	Wiener 滤波	小波软阈值方法	小波硬阈值方法	本文方法
分片常数图像	5.99	15.38	10.88	11.12	18.39

2) 用“Moon”图像作为测试图像, 对原图像附加  $\sigma = 35$  的高斯白噪声, 我们构造合成的 Haar + Heaviside 字典, 采用二维信号的可分离表示方法进行处理, 利用新的迭代算法进行快速求解, 最后得到去噪后的图像。我们还应用小波软、硬阈值去噪方法、Wiener 滤波方法分别进行去噪实验, 得到处

理结果如图 2 所示。

由图 1~2 和表 1~2 可见, 小波软阈值和硬阈值去噪方法所得图像的边缘比较模糊; 维纳滤波方法所得图像的边缘比较锐利, 但同时产生了一些虚假线条和斑块; 本文去噪方法所得图像的边缘更加清晰。尽管由于按照行列分别处理带来些许块状效应, 与传统去噪方法相比, 信噪比的改进程度更高, 图像视觉效果更好, 同时它还能有效地保持图像中的重要特征。

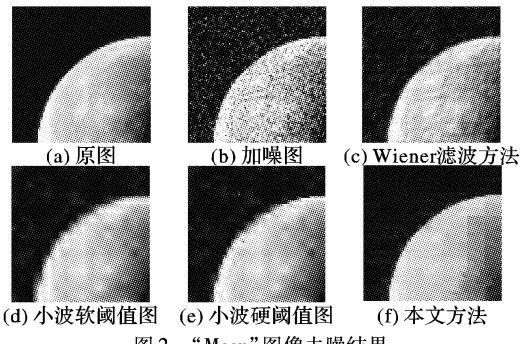


图 2 “Moon”图像去噪结果

表 2 信噪比比较(单位: dB)

SNR	含噪信号	Wiener 滤波	小波软阈值方法	小波硬阈值方法	本文方法
moon 图像	10.43	17.01	16.11	16.96	18.90

## 5 结语

新的基于快速基追踪算法的图像去噪方法考虑了一类信号的可分离表示形式, 分别在图像的行和列的方向上构造相应的字典, 由此降低了字典的维数, 并将一个二维问题转化为两个一维问题来处理, 最后利用一种新的迭代算法进行求解, 从而大大加快了计算速度。理论分析和实验结果表明, 该方法能够快速稳定实现, 同时具有良好的去噪效果。

### 参考文献:

- CHEN S, DONOHO DL, SAUNDERS MA. Atomic Decomposition by Basis Pursuit[J]. SIAM J. Sci. Comp., 1999, 20(1): 33–61.
- DONOHO DL, ELAD M. Optimally Sparse Representation in General Dictionaries via Minimization[J]. PNAS, 2003, 100(5): 2197–2202.
- 傅霆, 尧德中. 稀疏分解的加权迭代方法及其初步应用[J]. 电子学报. 2004, 32(4): 567–570.
- MALLAT S. 信号处理的小波导引[M]. 第 2 版. 杨力华, 等译. 北京: 机械工业出版社, 2002. 319–320.
- HUO X-M. Sparse Image Representation Via Combined Transforms [EB/OL]. PH. D Paper of Stanford Univ. 1999. Available Online At: [HyperlinkHttp://www.isye.gatech.edu/~xiaoming/](http://www.isye.gatech.edu/~xiaoming/).
- DONOHO DL, ELAD M, TEMLYAKOV V. Stable Recovery of Sparse Overcomplete Representations in the Presence of Noise [EB/OL]. <http://www-stat.stanford.edu/~donoho/reports.html>, 2004.
- CETIN M, MALIOUTOV DM, WILLSKY AS. A variational technique for source localization based on a sparse signal reconstruction perspective[A]. Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Orlando, FL, May 2002.
- DONOHO DL. De-noising by Soft Thresholding[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1995, 41 (3): 613–627.