

## 插值细分曲面三角剖分研究

顾耀林, 周 军

(江南大学 信息工程学院, 江苏 无锡 214122)

(zhoujcius@126.com)

**摘 要:**把三维参数化曲面的离散化算法应用到三角网格表示的离散曲面上。用一种可生成  $C^1$  阶连续曲面的插值分割技术——改进蝶形算法,重新构造极限面。用推进波前法在物理空间直接离散化,所以不需要进行参数化。

**关键词:**3D 曲面;离散曲面;推进波前法;插值细分

**中图分类号:**TP751;TP391.9 **文献标识码:**A

## Research of triangulation of interpolating subdivision surfaces

GU Yao-lin, ZHOU Jun

(School of Information Engineering, Southern Yangtze University, Wuxi Jiangsu 214122, China)

**Abstract:** An algorithm for the discretization of parameter 3D surfaces was extended to the family of discrete surfaces represented by triangular meshes of arbitrary topology. The limit surface was reconstructed from the mesh using the modified Butterfly scheme, an interpolating subdivision technique yielding a  $C^1$  surface. The recovered surface was discretized directly in the physical space by the advancing front technique. Thereby parameterization of the surface was not required. The performance of the proposed strategy was presented with an example.

**Key words:** 3D surface; discrete surface; advancing front; interpolating subdivision

### 0 引言

我们知道基于空间离散的数值方法(如有限元素法——FEM<sup>[1]</sup>,边界元素法——BEM<sup>[2]</sup>等),在 CAD 和 CAE 中的作用非常重要。所以自动有效的网格划分,包括三维曲面的离散化,也很重要。

目前,很多算法可以处理三维参数曲面<sup>[3]</sup>(Ferguson, Coons, Bezier, B-spline 曲面),且通常都是通过间接法来实现。但是,很多应用产品可以处理离散性曲面(如变形有限单元网格<sup>[4]</sup>,CT 扫描点的三角剖分<sup>[5]</sup>,数字地图<sup>[6]</sup>等)。本文把三维参数曲面的离散化算法应用到任意拓扑的三角网格表示的离散曲面上。

### 1 极限面的重构

本文中,采用基于改进蝶形法<sup>[7]</sup>的迭代分割。这是一种非均匀插值稳定方法。该方法中,当前层节点保持不变,而下一层新节点  $S$  的位置为:

$$S = w_R R + \sum_{i=1}^n w_i P_i \quad (1)$$

其中  $P_i$  为连接到  $n$  阶曲面节点  $R$  的节点,  $w_R$  和  $w_i$  对应于曲面均化掩码的权值。

类似地,可用文献<sup>[8]</sup>中的一维插值分割法,恢复极限边界曲线,该分割法可生成  $C^1$  阶连续曲线。

分析细分法的对应局部细分矩阵的本征结构<sup>[9]</sup>,可得:

$$c^j = Lc^{j-1} \quad (2)$$

由于是稳定算法,等式(2)可以改写为

$$c^j = (L)^j c^0 \quad (3)$$

设细分矩阵  $L$  不亏损,则右特征向量  $v$  形成一个基,且向量  $c^0$  可以表示为这些右特征向量  $v$  的线性组合<sup>[10]</sup>,所以等式(3)可变形为

$$\begin{aligned} c^j &= (L)^j \sum_{k=1}^P \alpha_k v_k \\ &= \sum_{k=1}^P \alpha_k (L)^j v_k \\ &= \sum_{k=1}^P \alpha_k (\lambda_k)^j v_k \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $\alpha_k$  是线性组合的系数,  $\lambda_k$  表示  $L$  的特征值,  $p$  指和  $R$  相关的节点数。因此,无穷次细分后,

$$\begin{aligned} c^\infty &= \lim_{j \rightarrow \infty} (L)^j c^0 \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^P \alpha_k (\lambda_k)^j v_k \end{aligned} \quad (5)$$

该细分法是仿射不变的,所以  $L$  的每一行之和为一。即:

$$Le = e \quad (6)$$

其中  $e$  的所有项都为 1。且由文献<sup>[7]</sup>,可设  $e$  为 1 重主特征值  $\lambda_1 = 1$  的第一右特征向量  $v_1$ ,则等式(5)变为

$$e^\infty = \alpha_1 v_1 \quad (7)$$

由于

$$\alpha_k = u_k^T c^0 \quad (8)$$

$u$  为  $L$  的左特征向量( $u_i \cdot v_j = \delta_{ij}$ ),且  $v_1$  的所有项都等于 1,所以

$$R^\infty = u_1^T c^0 \quad (9)$$

如果是插值法,  $L$  的主左特征向量中,只有  $c^0$  中对应节点  $R$  的部分等于 1,其余所有项都等于 0。所以节点  $R$  的极限位置,等于它在控制网格中的初始位置。

微分极限面时,可以采用一种类似的方法计算微商掩码,生成足够光滑的极限面。曲面节点  $R^j$  的切向量  $t$  为

$$t^j = P_i^j - R^\infty \quad (10)$$

$P_i^j$  是连接到节点  $R$  的一个节点,根据式(4),可得

$$P_i^j = \sum_{k=1}^P \alpha_k (\lambda_k)^j v_{k,i} \quad (11)$$

其中  $v_{k,i}$  的下标  $i$  表示和  $P_i$  相关的  $v_k$  项。类似地,根据式(7),  $R^\infty$  可表示为

$$R^\infty = \alpha_1 V_{1,R} \quad (12)$$

于是

$$t^\infty = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^P \alpha_k (\lambda_k)^j v_{k,j} - \alpha_1 v_{1,R} \quad (13)$$

当  $j$  趋向无穷大时,  $t^\infty$  趋于 0 (由于  $\lambda_{k \neq 1} < 1$ ), 所以规范式为:

$$\begin{aligned} \hat{t}^\infty &= \frac{t^\infty}{\|t^\infty\|} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(\lambda_{2,3})^j \sum_{k=2}^P \alpha_k \left( \frac{\lambda_k}{\lambda_{2,3}} \right)^j v_{k,i}}{(\lambda_{2,3})^j \left\| \sum_{k=2}^P \alpha_k \left( \frac{\lambda_k}{\lambda_{2,3}} \right)^j v_{k,i} \right\|} \end{aligned} \quad (14)$$

由于极限面至少  $C^1$  连续, 即  $\lambda_{2,3} = 1/2 > \lambda_{k>3}$ 。所以

$$\hat{t}^\infty = \frac{\alpha_2 v_{2,i} + \alpha_3 v_{3,i}}{\|\alpha_2 v_{2,i} + \alpha_3 v_{3,i}\|} \quad (15)$$

## 2 网格生成

有了极限面的表示后,在给定的极限面上,生成新的三角网格。实现层次离散化。

这里,曲面是通过推进波前法来离散化的<sup>[11]</sup>。首先,建立初始波前的边界曲线(包括内循环)的组成边。初始波前建好后,就可以根据边移除算法来连续生成网格。步骤如下:

- 从波前中取出第一条边  $AB$ ;
- 计算“理想”点  $P$  (形成新  $\triangle ABP$ );
- 估算点  $P$  到极限面的投影点  $P'$ ;
- 建立  $P'$  点的局部邻域;
- 搜索邻域,找到最合适的  $C$  点,生成新  $\triangle ABC$ ;
- 进行交点检查,避免在邻域内重复生成已存在的三角形;

• 更新波前,记录新形成的  $\triangle ABC$ 。

生成的网格要进行一次优化来改善最终网格的质量。这里采用了和拓扑变换相结合的 Laplacian 光顺技术(对角线交换)。经过几轮光顺(一般大于 6)后,可生成优化网格。注意,和 2 维光顺不同,重新定位的节点可能会移出曲面。所以,必须采用点一面的映射来进行面约束。

## 3 实现

### 3.1 精确的点一面投影

这里,只对原始控制格(图 1(a))中的一小块三角形上进行细分。对该三角形的细分是渐进完成的。下一次只会细分四个子三角形中包含投影点的小三角形(图 1(b))。

通过引进中间节点(如图 2),进一步细分控制格三角形(三角形边变为曲线)。由于细分时很难预测三角形的变化,因此三角形的选择非常重要。用推进波前法时,投影点总是在生成网格的附近。所以,可以通过遍历,实现初始控制格中的三角形定位(图 1a)。在分割的相应中间节点,三角形定位

和子三角形选择更加复杂。跟踪子三角形选择,一旦检测到无效选择,执行回溯。更正方法是在相反方向上遍历细分记录,在最高层重新选择一个方向。

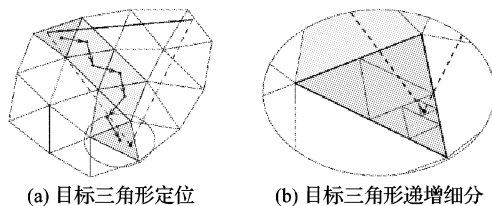


图 1 点到面投影

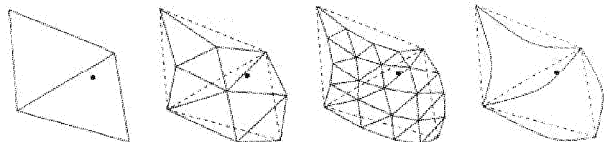


图 2 定位一个点到目标三角形

### 3.2 逼近点一面投影

随着网格密度的增加,投影算法的开销就越来越大。解决的办法是用计算损耗较低的“逼近”投影来实现:在初始控制格的单个元素上,用 Bezier 三角曲面片来逼近极限面。 $N$  次三角 Bezier 曲面片的参数公式为<sup>[12]</sup>:

$$r_p(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} P_i B_i^n(u, v, w) \quad (16)$$

其中  $r_p(u, v, w)$  是曲面片上的点,  $P_i$  是 Bezier 控制点,  $B_i^n(u, v, w)$  是二元 Bernstein 多项式:

$$\begin{cases} B_i^n(u, v, w) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k \\ |i| = i + j + k = n \end{cases} \quad (17)$$

其中,  $u, v, w$  是重心系数;  $i, j, k \geq 0$ 。

把重心作为初始值,用迭代方式把点投影到 Bezier 三角曲面片上。每次迭代,点先被投影到切平面上,然后用曲面片梯度,计算重心坐标  $u, v, w$  的增量,进一步逼近投影。重复该过程,一直达到所需精度为止。

这里采用二次 Bezier。先用第一层全局细分的节点计算出控制多边形。细分过程中,保持曲面片的顺序,可提高计算效率。由于二次曲面片不能很好地捕捉从凸到凹的曲率变化<sup>[13]</sup>,所以投影结果很难令人满意。这里,根据曲面片法向和用微商掩码在控制格上计算出的法向是否匹配,决定是否采用该曲面片。如果曲面片顶点处的法向偏离大于  $30^\circ$ ,就采用该迭代分割来处理。但是,必须用“精确”投影定位最终节点(除了平面)。

## 4 例子

我们用两个例子来说明该算法的性能。第一个例子给出了,在一个坝形曲面上,执行该算法的性能。另一个例子(兔形曲面)也显示了该算法的高效性。

### 4.1 坝形曲面

我们用坝形曲面来验证该算法。图 3 用 5 个均匀控制格生成混凝土坝的网格。控制格 1, 2, 3, 4, 5 分别包含 806, 1632, 3284, 6566, 和 13128 个元素。在每个控制格上,分别生成九个均匀网格,对应的元素大小为 0.5, 0.22, 0.16, 0.11, 0.091, 0.079, 0.071, 0.065, 和 0.06。图 4 给出了每个控制格与生成元素数的计算时间相关性。总计算时间(实线)包括收敛极限为 10% 的“逼近”投影(AP)生成网格,收敛极限为 1% 的“逼近”投影进行 5 次 Laplacian 光顺,以及收敛判则为

0.1%的“精确”投影(EP)进行一次 Laplacian 光顺。“逼近”投影部分的计算复杂性为  $O(N)$ 。精确投影的光顺部分的计算复杂性也只有  $O(N \log(N))$ 。整个计算时间对控制格密度的敏感程度,主要跟最后一轮光顺的“精确”投影有关。每次,控制三角形的大小减半,整个计算时间以一个固定值或多或少地减少。

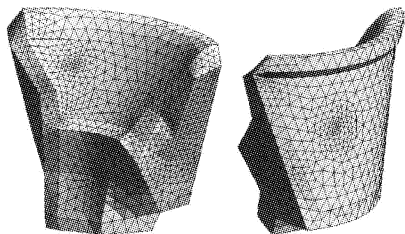
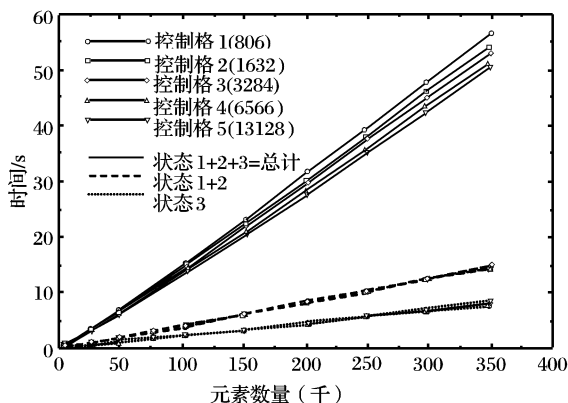


图3 坝形曲面的细分网格



注:状态 1:生成(AP) 状态 2:5 轮光顺(AP) 状态 3:一轮光顺(EP)

图4 坝形曲面-时间 VS 元素数量

#### 4.2 兔形曲面

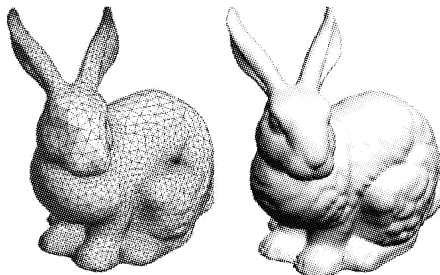
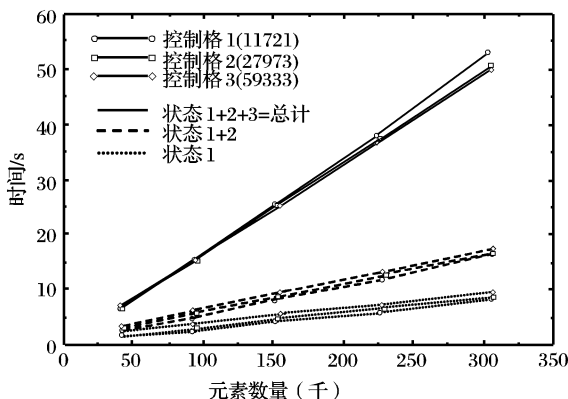


图5 图形曲面的网格图和极限面



注:状态 1:生成(AP) 状态 2:5 轮光顺(AP) 状态 3:一轮光顺(EP)

图6 兔形曲面-时间 VS 元素数量

作为第二个例子,图 5 给出了一个兔形曲面的离散化。同样,在这里,我们相应地用含有 11721, 27972 和 59333 个元素的三个控制格,来对兔形曲面的身体进行三角化。但是,这

次是用基于曲率元素大小控制的。所采用的投影算法(包括极限精度)和第一个例子坝形曲面是一样的。图 6 显示了计算时间和各个控制网格生成元素数量的关系,并按照离散化各个不同阶段来分别给出。这里,和前面类似,基于逼近投影部分也非常接近于线性分布。但是,对应于控制格 2 和 3 的曲线与对应于控制格 1 的曲线在方向上还是有所改变的。这是由于,当控制格的密度增加时,花在控制格的输入和八叉树数据结构构造方面的计算时间会增加。当然,这也部分地减少了在较粗糙控制格上进行最后一轮光顺时,关于“精确”投影的消耗。这样可以使得控制格的密度对总响应的影响少一点。

#### 5 结语

本文给出一种对任意拓扑三角形网格表示的 3D 离散曲面进行直接三角剖分的方法。采用了一种新的插值分割方法——改进蝶形法,可生成阶可微的极限面。并用推进波前法实现离散化。我们从不同的角度给出了算法性能。尽管采用的插值方法存在很多优点,包括局部性和简单性,但是很多实验仍然显示该技术需要很高的计算要求(和有关参数化曲面的类似算法的性能相比),而且对控制格的不佳图形元素非常敏感。这些问题也是作者将进一步研究的内容。

#### 参考文献:

- [1] 薛继军, 马军星, 杨胜军, 等. 八节点四边形等参元非线性有限元分析[J]. 小型微型计算机系统, 2004, 25(9).
- [2] 梅春晖, 石教英. 基于边界元素法的柔软物体变形模拟[J]. 计算机学报, 2003, (12).
- [3] CHARLIE EE, WANG CL. Parameterization and parametric design of mannequins[J]. Computer-Aided Design, 2005, (1): 83-98.
- [4] BAGHDADI L, LADAK HM, STEINMAN DA. Template-based finite-element mesh generation from medical images[J]. Computer Methods and Programs in Biomedicine, 2005, (1): 11-21.
- [5] LÜRIG C, KOBELT L, ERTL T. Hierarchical Solutions for the Deformable Surface Problem in Visualization[J]. Graphical Models, 2000, (1): 2-18.
- [6] BJØRKE JT, NILSEN S. Wavelet representation of large digital terrain models[J]. Computers and Geosciences, 2003, (6): 695-703.
- [7] ZORIN D, SCHRÖDER P, SWELDENS W. Interpolating subdivision for meshes with arbitrary topology[A]. Computer graphics Proc. (SIGGRAPH '96), 1996. 189-192.
- [8] DYN N, GREGORY JA, LEVIN A. A four-point interpolatory subdivision scheme for curve design[J]. Computer Aided Geometric Design, 1987, (4): 257-268.
- [9] HALSTEAD M, KASS M, DEROSE T. Efficient, fair interpolation using Catmull-Clark surfaces[J]. Computer Graphics Proc. (SIGGRAPH '93), 1993: 35-44.
- [10] RYPL D, BITTNER Z. Triangulation of 3D surfaces reconstructed by interpolating subdivision[J]. Computers and Structures, 2004, 82(10): 2093-2103.
- [11] BITTNER Z, RYPL D. Direct triangulation of 3D surfaces using the advancing front technique[J]. Numerical methods in engineering '96 (ECCOMAS '96), 1996. 86-99.
- [12] FARIN GE. Curves and surfaces for computer aided geometric design[M]. Academic Press Inc, 1997.
- [13] 丁友东, 华宣积. 一类非线性细分格式的保凸与分形性质[J]. 软件学报, 2000, 11(9): 1263-1267.