

文章编号:1001-9081(2007)02-0333-04

基于 RBF 神经网络的网格数据聚类方法

潘 登,郑应平,徐立鸿,陈 俊

(同济大学 电子与信息工程学院,上海 200092)

(pandengreal@163.com)

摘 要:把径向基函数(RBF)神经网络和网格结合起来,提出了一种能够并行处理数据和便于增量计算的智能聚类方法。介绍了网格聚类原理、RBF 神经网络神经元的数量和基函数的选择,并针对数据聚集区域的位置辨识、提高分辨率和计算速度等问题,深入讨论了聚类策略与聚类算法。仿真表明了该方法的有效性。

关键词:径向基函数神经网络;长方体基函数;网格划分;聚类;分辨率;方法

中图分类号: TP183 **文献标识码:** A

Grid method of data clustering based on RBF neural networks

PAN Deng, ZHENG Ying-ping, XU Li-hong, CHEN Jun

(School of Electronic & Information Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Radial Basis Function (RBF) neural networks and grid partition were integrated into a whole in this paper, and an intelligent method of data clustering was proposed, which can process the data in parallel and make increments computation easy. This paper introduced the principle of grid clustering, and the choice of basis functions and the neurons number in RBF neural networks. And then, the clustering strategy and the clustering algorithm were deeply discussed with its aims to identify the locations of data clustering area, and to improve the resolution of data clustering area, and to accelerate the computing. The simulation verifies the validity of this method.

Key words: Radial Basis Function (RBF) neural networks; cuboid basis function; grid partition; clustering; resolution; method

0 引言

聚类分析是一种新兴的多元统计方法,是当代分类学与多元分析的结合。它依赖于对观测对象的接近程度(距离)或相似程度的理解,定义不同的距离量度和相似性量度就可以产生不同的聚类结果。聚类分析技术一般针对大量的样本数据,所需的计算量比较庞大,如何发现这些数据的聚集程度或者说在特征上的相似程度,聚类分析方法和有效的分析工具至关重要。

迄今为止,学者们已经提出了许多聚类算法,如基于划分的方法^[1]、基于层次的方法^[2]、基于密度的方法^[3,4]、基于网格的方法^[5]等。划分方法对大规模、高维数据集进行聚类以及处理复杂形状的聚类,需要进一步的扩展;层次方法的一个步骤(合并或分裂)完成,不能被撤消,不能更正错误的决定,往往需要集成其他聚类技术;密度方法可以过滤“噪声”,发现任意形状的簇,但对分散、稀疏的多维数据的处理“力不从心”;网格方法把对象空间量化为有限数目的单元,形成了网格结构,并在网格结构上进行聚类分析,能够对多维数据和复杂形状进行聚类分析,计算速度较快。学者们研究各种聚类方法,试图实现对大规模、高维数据的有效聚类,但取得的成果至今未能令人满意。

近年来,模糊理论、神经网络、遗传算法、蚁群算法等智能方法应用于聚类分析的研究,取得了好的成果。其中,神经网络

络多与线性规划、模糊理论、遗传算法结合起来用于聚类分析,目前成功用于聚类分析的神经网络模型主要有 AG、ARTI、BSB、Perception、ADALINE/MADALINE、BP 等。

本文基于以上背景,在当前聚类研究成果的基础上,将网格划分与神经网络结合起来展开研究,探索高维数据聚类技术,使聚类分析不仅可以根据实际需要调整数据聚集区域分辨率和提高聚类精度,而且能够并行处理数据,和便于增量更新聚类分析的结果。

1 网格聚类原理

网格有各种形状,可以是平面的,也可以是立体的或超立体的。本文以 $x-y$ 二维平面为例阐述网格聚类原理。

当一个点随机地跳跃于平面之上,或对一个二维连续随机函数进行采样,用二维平面图记录其运动位置或其采样值,就会形成图 1 所描述的许多点。网格覆盖其上,是为了辨识和定位这些点的聚集区域。图 1 是均匀网格构成的一张网,假设每个网格都是矩形,其面积为 $\Delta x \times \Delta y$, i, j 是整数,且 $-m < i \leq m$, $-m < j \leq m$ (m 为自然数),当 $(i-1) \times \Delta x < x \leq i \times \Delta x$, $(j-1) \times \Delta y < y \leq j \times \Delta y$ 时,充满阴影区域的网格,就成为我们关注的对象。可以为网格的数据聚集程度设置一个标准(阈值),大于该标准,就用阴影填充该网格,持续下去,大于阈值且彼此相邻的网格就会因为相互之间自然联结而扩展,形成数据簇,各数据簇根据相互之间距离远近,决定是否合并

收稿日期:2006-08-09;修订日期:2006-10-23 基金项目:国家自然科学基金资助项目(60343002)

作者简介:潘登(1969-),男,安徽怀远人,博士研究生,主要研究方向:智能控制、智能算法、图像处理等; 郑应平(1941-),男,福建福州人,教授,博士生导师,主要研究方向:智能控制、预测与决策、系统工程等; 徐立鸿(1960-),男,山东日照人,教授,博士生导师,主要研究方向:智能控制、图像处理等; 陈俊(1980-),男,上海人,硕士,主要研究方向:智能控制。

或作为独立数据聚集区域,较小且处于偏僻区域的数据簇可视为孤立奇点。因此,不难发现这些点的分布规律和它的聚集程度。

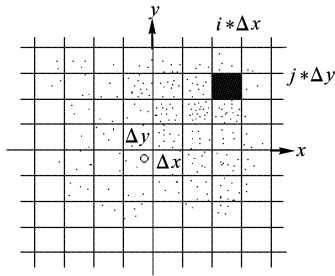


图1 网格数据聚类原理

当一个点随机地跳跃于平面之上,或对一个二维连续随机函数进行采样,每一个点或每一个采样值,都有一个区域与之对应,而且可以通过改变 i, j 的值,来寻找到这个区域。

网格可大可小。当网格较大时,辨识和定位数据聚集区域的速度较快,但分辨率下降;反之,当网格较小时,分辨率提高,但辨识和定位数据聚集区域的速度则下降。与一台特定英寸的电视类似,其扫描线愈密,图像愈清晰。

网可以整体平移和旋转,实现网格对数据聚集区域的“聚焦”。

2 基函数的选择与 RBF 神经网络

2.1 基函数及其选择

当一个点随机地跳跃于平面之上,或对一个二维连续随机函数进行采样,研究者一开始并不了解这个点运动轨迹或者采样值的分布情况,无任何先验知识可资借鉴,必须以一把“尺子”去测量每一个网格的数据聚集情况,从而做出正确的判断。这里所说的“尺子”针对网格里的每一个点(数据),不妨称之为每一个点的“特性函数”,其本身也可能没有特别的意义。两个不同的特性函数,就如同单位不同的尺子,其测量的结果需要换算才能进行比较,为了避免这种不必要的麻烦,每一个点都采用相同的特性函数。本文采用二维输入长方体函数作为 RBF 神经网络的基函数,见图 2 所示。

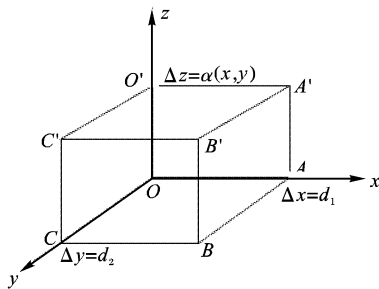


图2 二维输入长方体基函数

矩形 $ABCO$ 为网格, $\Delta x = d_1, \Delta y = d_2$ 均为常数,分别代表网格 $ABCO$ 的长、宽,均大于 0, $\Delta z = \alpha(x, y)$ 为 $ABCO$ 网格内 ($0 < x \leq \Delta x, 0 < y \leq \Delta y$) 各点的特性函数,且:

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x * \Delta y}, & 1 < x \leq \Delta x, 0 < y \leq \Delta y \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1)$$

这样,就可以把特性函数作为“尺子”,去测量每一个网格的数据聚集情况。 $\alpha_{i,j}(x, y)$ 相当于各网格内点数的“比例放大器”。

2.2 RBF 神经网络

为不失一般性,本文以二维输入 RBF 神经网络为例进行

说明。

见图 3 所示,神经元与网格一一对应,共 $2m \times 2m$ 个网格,每个网格的长、宽分别均为 $\Delta x, \Delta y$,则二维输入 RBF 神经网络第 (i, j) 个基函数为:

$$\alpha_{i,j}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x * \Delta y}, & (i-1) * \Delta x < x \leq i * \Delta x \\ & (j-1) * \Delta y < y \leq j * \Delta y \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2)$$

其中, $-m < i \leq m, -m < j \leq m$ 。下面针对 (x, y) 处在不同象限对(2)式作详细说明。

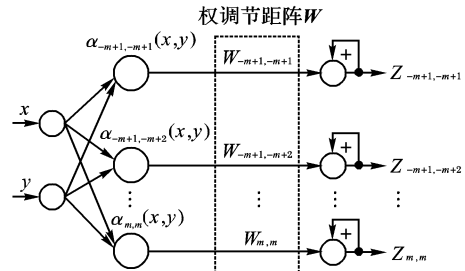


图3 二维输入 RBF 神经网络

当 (x, y) 位于第 I 象限时, $0 < i \leq m, 0 < j \leq m$:

$$\alpha_{i,j}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x * \Delta y}, & (i-1) * \Delta x < x \leq i * \Delta x \\ & (j-1) * \Delta y < y \leq j * \Delta y \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3)$$

当 (x, y) 位于第 II 象限时, $-m < i \leq 0, 0 < j \leq m$:

$$\alpha_{i,j}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x * \Delta y}, & (i-1) * \Delta x < x \leq i * \Delta x \\ & (j-1) * \Delta y < y \leq j * \Delta y \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (4)$$

当 (x, y) 位于第 III 象限时, $-m < i \leq 0, -m < j \leq 0$:

$$\alpha_{i,j}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x * \Delta y}, & (i-1) * \Delta x < x \leq i * \Delta x \\ & (j-1) * \Delta y < y \leq j * \Delta y \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5)$$

当 (x, y) 位于第 IV 象限时, $0 < i \leq m, -m < j \leq 0$:

$$\alpha_{i,j}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x * \Delta y}, & (i-1) * \Delta x < x \leq i * \Delta x \\ & (j-1) * \Delta y < y \leq j * \Delta y \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (6)$$

通过(3)、(4)、(5)、(6)式可以得出这样的结论:(2)式适用于 I、II、III、IV 象限的任何一个网格,可以作为其内部各点的特性函数。

权调节矩阵 W 可以实现 $4m^2$ 个网格衡量尺度的缩(小)放(大),如增强区域间的对比度,和达到某种特殊效果等。显而易见:

$$Z_{i,j} = \sum_k w_{i,j} \alpha_{i,j}(x^{(k)}, y^{(k)}) \quad (7)$$

其中, k 为自然数,表示 (x, y) 的数量。

令:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{-m+1, -m+1} & Z_{-m+1, -m+2} & \cdots & Z_{-m+1, m} \\ Z_{-m+2, -m+1} & Z_{-m+2, -m+2} & \cdots & Z_{-m+2, m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{m, -m+1} & Z_{m, -m+2} & \cdots & Z_{m, m} \end{bmatrix},$$

$$W = \begin{bmatrix} W_{-m+1, -m+1} & W_{-m+1, -m+2} & \cdots & W_{-m+1, m} \\ W_{-m+2, -m+1} & W_{-m+2, -m+2} & \cdots & W_{-m+2, m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{m, -m+1} & W_{m, -m+2} & \cdots & W_{m, m} \end{bmatrix},$$

$$\alpha(x^{(k)}, y^{(k)}) = \begin{bmatrix} \alpha_{-m+1, -m+1}(x^{(k)}, y^{(k)}) & \alpha_{-m+1, -m+2}(x^{(k)}, y^{(k)}) & \cdots & \alpha_{-m+1, m}(x^{(k)}, y^{(k)}) \\ \alpha_{-m+2, -m+1}(x^{(k)}, y^{(k)}) & \alpha_{-m+2, -m+2}(x^{(k)}, y^{(k)}) & \cdots & \alpha_{-m+2, m}(x^{(k)}, y^{(k)}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m, -m+1}(x^{(k)}, y^{(k)}) & \alpha_{m, -m+2}(x^{(k)}, y^{(k)}) & \cdots & \alpha_{m, m}(x^{(k)}, y^{(k)}) \end{bmatrix}$$

则(7)式的矩阵表达式为:

$$Z = \sum_k W \cdot * \alpha(x^{(k)}, y^{(k)}) \quad (8)$$

$W \cdot * \alpha(x^{(k)}, y^{(k)})$ 表示矩阵点乘运算,即两个矩阵对应元素之间相乘^[6],也称元素群乘法运算^[7]。

由于各网格的数据聚集程度不同, Z 将在3维空间形成高低不同的柱体,用水平平面切割这些柱体,截面反映了一定标准(阈值)下的数据聚集情况,这与用阴影填充网格的本质是一样的。如果是多维输入,只要能找到一个适合作为“尺子”的多维输入变量基函数,即可实现多维数据处理。显然,神经网络与网格聚类技术的结合利于并行计算和增量更新,使得该方法适于大规模数据和高维数据的聚类分析。

3 聚类策略与算法

数据聚类一般存在计算速度与分辨率的问题,如何在二者之间取得“均衡”,使得数据聚类在计算速度和分辨率上都达到令人满意的效果,是本文研究的主要内容之一。

基于 RBF 神经网络的网格数据聚类方法,其分辨率主要与网格大小($\Delta x * \Delta y$)有关:

- 1) 网格较小, $\alpha_{i,j}(x, y)$ 较大,分辨率较高;
- 2) 网格较大, $\alpha_{i,j}(x, y)$ 较小,分辨率较低。

其计算速度主要与网格大小($\Delta x * \Delta y$)和神经元数量($4m^2$)有关:

1) $4m^2 * \Delta x * \Delta y$ 的值太大时,如果数据稀疏区域和大量空网格区域的存在,将导致计算时间增加。

2) 网格大小($\Delta x * \Delta y$)确定时:

m 取值太小,分辨率较低,需要对网格多次重新划分、调整神经元基函数并计算,因而速度较慢; m 取值较大,分辨率较高且小于目标分辨率时,重新划分网格、调整神经元基函数,速度较快。

可见,分辨率和计算速度都与聚类分析空间的大小和网格划分有关。

3.1 聚类策略

确定聚类分析空间的大小以后,网格划分就显得非常重要。 m 的值太小,则分辨率较低,需要重新划分和计算,势必延长计算速度; m 的值太大,分辨率较高,但需要大量的神经元。不妨以较小的、适当的 m 值进行网格划分和聚类分析,根据分析结果,略去数据稀疏的网格区域和空网格区域。同时,针对目标区域决定是否选择较大的 m 值以及选择多大的 m 值,以避免神经网络在学习样本数量有限的情况下精度难以保证,以及学习样本数量很多时陷入“维数灾难”、泛化性能不高的缺陷^[7,8]。

显然,对于空间分布疏密不均衡的大规模、高维数据集而言,该策略能有的放矢,针对性强,使用较少数量的神经元,避免了选择 m 值的盲目性,从而可以在增加分辨率的前提下,减少有效网格数量和聚类操作的单元数目,降低计算复杂度,保证算法效率,显著提高计算速度。

3.2 聚类算法

基于 RBF 神经网络的网格数据聚类算法步骤如下:

步骤1: 选择 m , 确定神经元数量($4m^2$ 个)。

步骤2: 确定神经元基函数 $\alpha_{i,j}(x, y)$ 。

步骤3: 利用(8)式进行计算,得 Z 。

步骤4: 对计算结果 Z 进行评判,训练并确定网格阴影标识标准(阈值) θ 。其中:

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_{-m+1, -m+1} & \theta_{-m+1, -m+2} & \cdots & \theta_{-m+1, m} \\ \theta_{-m+2, -m+1} & \theta_{-m+2, -m+2} & \cdots & \theta_{-m+2, m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{m, -m+1} & \theta_{m, -m+2} & \cdots & \theta_{m, m} \end{bmatrix}$$

且 $\theta_{-m+1, -m+1} = \theta_{-m+1, -m+2} = \cdots = \theta_{m, m}$ 。

步骤5: $Z_{i,j}$ 大于阈值 $\theta_{i,j}$, 则用阴影标识相应的网格,以辨识数据聚集区域。

令:

$$V = \begin{bmatrix} V_{-m+1, -m+1} & V_{-m+1, -m+2} & \cdots & V_{-m+1, m} \\ V_{-m+2, -m+1} & V_{-m+2, -m+2} & \cdots & V_{-m+2, m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{m, -m+1} & V_{m, -m+2} & \cdots & V_{m, m} \end{bmatrix} = f(Z - \theta) \quad (9)$$

则:

$$V = f \left(\begin{bmatrix} Z_{-m+1, -m+1} & Z_{-m+1, -m+2} & \cdots & Z_{-m+1, m} \\ Z_{-m+2, -m+1} & Z_{-m+2, -m+2} & \cdots & Z_{-m+2, m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{m, -m+1} & Z_{m, -m+2} & \cdots & Z_{m, m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta_{-m+1, -m+1} & \theta_{-m+1, -m+2} & \cdots & \theta_{-m+1, m} \\ \theta_{-m+2, -m+1} & \theta_{-m+2, -m+2} & \cdots & \theta_{-m+2, m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{m, -m+1} & \theta_{m, -m+2} & \cdots & \theta_{m, m} \end{bmatrix} \right)$$

将(7)式代入上式,得:

$$V_{-m+1, -m+1} = \sum_k w_{-m+1, -m+1} \alpha_{-m+1, -m+1}(x^{(k)}, y^{(k)}) - \theta_{-m+1, -m+1}$$

$$V_{-m+1, -m+2} = \sum_k w_{-m+1, -m+2} \alpha_{-m+1, -m+2}(x^{(k)}, y^{(k)}) - \theta_{-m+1, -m+2}$$

...

$$V_{-m+1, m} = \sum_k w_{-m+1, m} \alpha_{-m+1, m}(x^{(k)}, y^{(k)}) - \theta_{-m+1, m}$$

$$V_{-m+2, -m+1} = \sum_k w_{-m+2, -m+1} \alpha_{-m+2, -m+1}(x^{(k)}, y^{(k)}) - \theta_{-m+2, -m+1}$$

$$V_{-m+2, -m+2} = \sum_k w_{-m+2, -m+2} \alpha_{-m+2, -m+2}(x^{(k)}, y^{(k)}) - \theta_{-m+2, -m+2}$$

...

$$V_{-m+2, m} = \sum_k w_{-m+2, m} \alpha_{-m+2, m}(x^{(k)}, y^{(k)}) - \theta_{-m+2, m}$$

...

$$V_{m, -m+1} = \sum_k w_{m, -m+1} \alpha_{m, -m+1}(x^{(k)}, y^{(k)}) - \theta_{m, -m+1}$$

$$V_{m, -m+2} = \sum_k w_{m, -m+2} \alpha_{m, -m+2}(x^{(k)}, y^{(k)}) - \theta_{m, -m+2}$$

...

$$V_{m,m} = \sum_k w_{m,m} \alpha_{m,m}(x^{(k)}, y^{(k)}) - \theta_{m,m}$$

当 $V_{i,j} \geq 0$ 时, 则用阴影填充第 (i,j) 个网格。

步骤 6: 如果数据聚集区域满足分辨率 (d) 要求 (即 $\Delta x * \Delta y \leq d$), 则结束; 否则, 对数据聚集区域重新进行网格划分, 转步骤 1。

数据聚类, 研究数据的接近程度 (距离) 或相似程度, 以发现大量数据隐含的、未知的、有潜在应用价值的信息或模式。一般针对有限空间来研究数据的聚集情况, 不可能研究无限空间数据聚集情况。在步骤 (1)、(2) 中, $m, \Delta x, \Delta y$ 相继确定, 也就确定了数据聚类研究的空间范围。聚类策略应用于聚类算法, 便于快速发现数据聚集的子空间。

4 实例仿真

一 动点随机跳跃于平面之上, 当积累 3 000 个点时, 聚集情况见图 4(a) 所示, 当积累 6 000 个点时, 聚集情况见图 4(b) 所示。

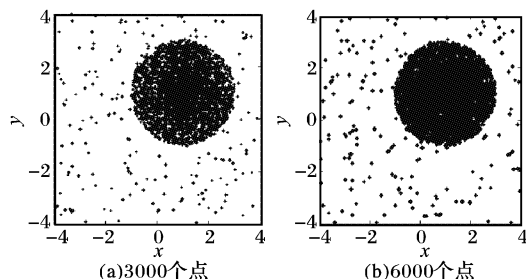


图 4 数据分布情况

由图 3 和公式 (7) 可知, 基于 RBF 神经网络的网格数据聚类方法能够根据数据的动态累积情况, 进行聚类分析, 即实现并行、增量计算。由于这里主要介绍基本方法, 不追求不同区域间的强烈对比和某些区域的特殊效果, 故令 $w_{-m+1, -m+1} = w_{-m+1, -m+2} = \dots = w_{m,m} = 1$ 。图 5 为 6 000 个点、分辨率 $d = 0.0625$ 时数据的聚类分析结果。

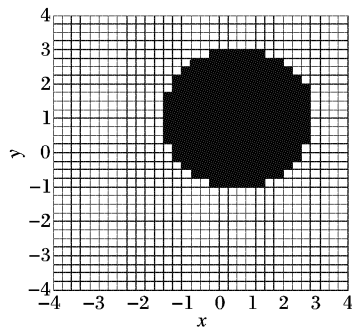


图 5 网格数据聚类分析

聚类分析的结果与数据实际分布 (见图 4(b)) 基本上是一致的。

数据分布较多的相邻网格聚集成簇, 相邻的簇, 如果距离较近, 又可以聚簇成区, 实例仿真了单个数据聚集区域的情况。多个数据聚集区域的情况较单区域复杂, 但方法上与此类似, 不再赘述。

5 结语

RBF 神经网络的引进, 使网格数据聚类分析具有并行处理和增量更新的功能。相对其他聚类算法, 具有简洁、灵活的特点。应当指出, 本文在以下方面还需要深入研究:

1) 网格结构整体平移和旋转, 实现网格对数据聚集区域的“聚焦”。

2) 其他基函数的应用研究。

参考文献:

- [1] KAUFMAN L, ROUSSEUW PJ. Finding groups in data: An introduction to cluster analysis [M]. New York: John Wiley & Sons, 1990.
- [2] SUDIPTO G, RASTOGI R, SHIM K. Cure: An efficient clustering algorithm for large databases [A]. Proceedings of the ACM SIGMOD international conference on Management of data [C]. New York: ACM Press, 1998. 73-84.
- [3] ANKERST M, BREUNIG M, KRIEGER H-P, et al. Optics: Ordering points to identify the clustering structure [A]. Proceedings of the ACM SIGMOD international conference on Management of data [C]. New York: ACM Press, 1999. 49-60.
- [4] HAN JW, KAMBER M. Data mining: concept and techniques [M]. Morgan Kaufmann Publishers, 2001.
- [5] AGRAWAL R, GEHRKE J, GUNOPULOS, et al. Automatic subspace clustering of high dimensional data for data mining applications [A]. Proceedings of the ACM SIGMOD international conference on Management of data [C]. New York: ACM Press, 1998. 94-105.
- [6] 薛定宇. 科学运算语言 MATLAB5.3 程序设计与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2000. 51-52.
- [7] 陈怀琛, 吴大正, 高西全. MATLAB 及在电子信息课程中的应用 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2003. 21-24.
- [8] YU YL, XU LH, WU QD. Generalized fuzzy neural networks [J]. ACTA AUTOMATICA SINICA, 2003, 29(6): 867-875.
- [9] ESTER M, KRIEGER H-P, SANDER J, et al. A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise [A]. Proceeding the 2nd international conference on knowledge discovery and data mining (KDD) [C]. Portland, 1996. 226-231.
- [10] 凌萍. 一种基于网格划分的模糊聚类算法 [J]. 徐州师范大学学报 (自然科学版), 2005, 23(1): 39-44.
- [11] 孙增圻. 智能控制理论与技术 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1997.
- [12] 王生生, 刘大有, 曹斌, 等. 一种高维空间数据的子空间聚类算法 [J]. 计算机应用, 2005, 25(11): 2615-2617.

(上接第 329 页)

大幅度转动的人脸检测及特征提取的问题。

参考文献:

- [1] VIOLA P, JONES M. Robust real-time object detection [R]. IEEE ICCV Workshop on Statistical and Computational Theories of Vision, USA: Vancouver, 2001.
- [2] ROWLEY HR. Neural network-based human face detection [D]. Pittsburgh, USA: Carnegie Mellon University, 1999.
- [3] CHAN TF, VESE LA. Active contours without edges [J]. IEEE

Transactions on Image Processing, 2001, 10(2): 266-277.

- [4] GAO S, BUI TD. Image Segmentation and Selective Smoothing by Using Mumford-Shah Model [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2005, 14(10): 1537-1549.
- [5] 吴敬华, 周昌乐. 快速人脸检测系统的设计与实现 [J]. 计算机应用, 2005, 25(10): 2351-2353.
- [6] 李光明, 田捷, 赵明昌, 等. 基于 Hessian 矩阵的中心路径提取算法 [J]. 软件学报, 2003, 14(12): 2074-2081.