

## 基于径向基函数网络的 SFS 算法研究

谢明红

(华侨大学 机电及自动化学院, 福建 泉州 362021)

(xmh3721@tom.com)

**摘要:**分析了现有从明暗恢复形状(SFS)的几种方法普遍存在对恢复的形状的连续性和光滑性的缺点,提出了一种基于径向基函数网络模型进行从明暗恢复形状的新算法。该算法先采用网络构造一个曲面方程,再利用反射函数作为约束条件,通过调整权因子和径向基函数中心和宽度对网络进行自学习,得到一个满意的曲面方程。理论和实验证明,该算法在恢复形状的准确性和曲面的光滑性,连续性上有较大改进。

**关键词:**径向基函数网络;从明暗恢复形状;计算机视觉

**中图分类号:** TP391.4 **文献标识码:** A

## Study of shape from shading algorithm based on the radial basis function network

XIE Ming-hong

(College of Mechanical & Automation, Huaqiao University, Quanzhou Fujian 362021, China)

**Abstract:** After analyzing the shortcomings of some methods on smoothness and continuity for Shape From Shading (SFS), a new SFS algorithm based on the radial basis function model was proposed. Firstly it constructed a curved face equation, and then did self-learning by adjusting power gene and center and width of the radial basis function with restriction condition on reflect function, finally gained satisfactory curved face equation. Theoretical analysis and experimental results show that this algorithm improves a lot on veracity of shape recovering and smoothness and continuity of the curved face.

**Key words:** radial basis function network; SFS(Shape From Shading); computer vision

### 0 引言

从明暗恢复形状(SFS)问题是一个典型的计算机视觉问题<sup>[1]</sup>。现有的 SFS 算法基本上都假设所研究的对象均为光滑表面物体,即认为物体表面高度函数是连续的,实际上,通过建立物体的光滑表面模型这种假设,对其表面形状进行约束,这样,将上述物体表面反射模型与物体的光滑表面模型相结合,再利用一些已知条件(如关于物体表面形状的初边值条件、奇异点的信息等),就构成了 SFS 问题的正则化模型,根据建立正则化模型方式的不同,现有的 SFS 算法根据采用的原理大致可分为四种方法:全局最小值法<sup>[2,3]</sup>、演化法<sup>[4,5]</sup>、局部法<sup>[6]</sup>和线性化法<sup>[7,8]</sup>。现有的方法大多基于离散点的求解方法,采用图像中网络离散化进行求解,求得的结果也是离散的,只能获得各个网络点的高度值,而网络之间连续性却无法保证。尽管在建立约束方程时都考虑到光滑约束,但在求解过程中采用了很多近似代替,如平均梯度,用曲面的弦长代替切线等,使得恢复后的曲面不具有严格的光滑性。为此,本文提出一种采用径向基函数网模型求解 SFS 问题的新算法,将表示曲面的映射关系存储于神经网络的连接权值和阈值中,这种全息式的信息存储模式,使得模型具有较强的容错性能和联想能力,不会因为部分神经元受损而严重影响其总体性能,也不会因为输入信号受到一定程度噪声的污染而严重歪曲输出,使其具有鲁棒性。

### 1 SFS 问题

假设图像的光照模型为标准朗伯反射模型,朗伯反射模型中曲面上点的强度可以表示为光线强度、光源方向以及曲

面的反射率之间的关系,表达式为;

$$I_L = R = A \rho \cos \theta_i \quad (1)$$

其中: $I_L$  为曲面上光线强度; $R$  为反射图函数; $A$  为光线强度; $\rho$  为曲面的反射率; $\theta_i$  为曲面的法向和光源的方向之间夹角。

设物体曲面方程为  $z = f(x, y)$ , 图像在点  $(x, y)$  处亮度值为  $E(x, y)$ , 光源方向矢量表示为  $S = (-p_s, -q_s, 1)$ , 曲面在点  $(x, y)$  法向矢量可以表示为  $N = (-p, -q, 1)$ ,  $\theta_i$  为曲面的法向和光源的方向之间夹角,将光源方向矢量和曲面法向矢量都转化为单位矢量,则光源方向单位矢量为:

$$S = \left( \frac{-p_s}{\sqrt{1+p_s^2+q_s^2}}, \frac{-q_s}{\sqrt{1+p_s^2+q_s^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+p_s^2+q_s^2}} \right)$$

曲面法向方向单位矢量为:

$$N = \left( \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right)$$

由于  $\cos(\theta_i) = N \cdot S$ , 通常光源强度  $A$  取 1, 曲面的反射率为常数,所以在 SFS 算法中式(1)转化为:

$$R = N \cdot S \quad (2)$$

将单位矢量  $N, S$  分别代入(2)式中,得朗伯反射模型的反射图函数为:

$$E(x, y) = R(p, q) = \frac{1 + pp_s + qq_s}{\sqrt{1+p_s^2+q_s^2} \cdot \sqrt{1+p^2+q^2}}$$

由于梯度  $(p, q)$  是图像函数的一阶偏微分,因此反射图函数方程是一个非线性的一阶偏微分方程。由于它存在两个

变量,存在无穷多个解,仅靠单一的反射函数方程无法求出曲面的法向方向。为此,需要利用曲面的其他几何性质作为约束条件来得到该问题的唯一解。在 SFS 算法中,如果只用反射函数作为已知方程求解曲面梯度  $p, q$ , 则 SFS 问题是一个典型的病态问题,会造成所求的曲面的梯度  $p, q$  满足反射函数方程,而不是所要求恢复的曲面,甚至造成恢复的曲面扭曲变形。在现有的 SFS 算法,一种是通过另外增加约束方程来求解曲面梯度  $p, q$ , 另一种方法不是求解曲面梯度  $p, q$ , 而是通过反射函数方程直接计算曲面高度。

## 2 径向基函数网络模型

从理论上说, BP 网络和径向基函数网络模型都可以拟合任何非线性函数,它们的共同点是都包括输入层、隐含层和输出层。由于 BP 算法采用的误差梯度下降法本身的局限性,使得网络的训练成为一个非常费时的过程,而且,网络极易陷入到局部最优,不能保证网络最后收敛。径向基函数网络起源于数值分析中的多变量插值的径向基函数方法。1988 年, Broomhead 和 Lowe 首先将径向基函数应用于神经网络设计,从而构成了径向基函数网络,该网络不仅同 BP 网络一样具有任意精度的泛函逼近能力,而且具有最优泛函逼近特性。它的另一优点是具有较快的收敛速度,径向基函数网络目前已在许多领域中的得到了广泛应用。尽管采用标准径向基函数网络模型恢复物体的形状的方法明显优于采用 BP 网络恢复物体形状的方法,但是标准径向基函数网络的输出层是隐含层的简单线性函数,致使在网络的学习过程中随着学习次数增加,输出值  $z$  的绝对值也随着增大,容易致使恢复变形,因此本文提出一种改进型的径向基函数网络模型,即输出层为隐含层的 Sigmoid 函数,其模型函数表达形式为:

$$U_i(x, y) = e^{-\left[\frac{(x-c_{xi})^2}{2\sigma_{xi}^2} + \frac{(y-c_{yi})^2}{2\sigma_{yi}^2}\right]}$$

$$z = \phi\left[\sum_{i=1}^n [w_i \cdot U_i(x, y)]\right]$$

其中:

$$\phi \text{ 函数为 } \phi(f) = \frac{1}{1 + e^{-f}};$$

$w_i$  为隐含层各节点到输出层  $z$  之间的权因子;

$c_{xi}$  是第  $i$  个基函数  $x$  方向的中心值;

$c_{yi}$  是第  $i$  个基函数  $y$  方向的中心值;

$\sigma_{xi}, \sigma_{yi}$  是第  $i$  个感知场的变量,决定了该基函数围绕中心点的宽度;

$n$  是感知单元即隐含层节点个数。

通用的神经网络算法是已知各个样本输入,同时知道与各个样本输入所对应的输出值,通过网络的学习实际输出值与期望输出之间的误差调节权因子,从而求得近似解。而在基于光照图像的 SFS 问题中,只知道图像中各个像素点的灰度值,对于径向基函数网络模型来说,已知输入样本值  $(x, y)$ , 但并不知道与其对应的输出期望值即高度值  $z$ , 但是在三维物体形状恢复过程中,  $z$  对输入样本  $(x, y)$  中两个变量的偏导数  $p, q$  必须满足满足反射函数方程,反射函数方程中的灰度值已知,因此,利用这个约束就同样可以对网络求解。

通过径向基函数网络解决 SFS 问题的基本思想是:通过径向基函数网络构造一个曲面公式,利用反射函数与灰度值之间的误差调节权因子、径向基函数中心和宽度,使得构造的曲面中每一点都满足反射函数值,从而拟合整个曲面。

### 2.1 连续性和光滑性证明

该 SFS 算法是一种直接恢复曲面高度值的方法,只用反射函数  $I = R$  就可以恢复任意光源方向图像,无需其他约束条件或惩罚函数。该网络构造了一个曲面公式,整个网络的

学习过程实际就是一个曲面拟合过程。由于在网络的学习过程中,曲面上每一点的梯度是通过曲面的连续函数求得,由径向基函数特点知该曲面可连续求导,保证了曲面的连续性;无论网络中各参数如何变化,都能具备  $z_{xy} = z_{yx}$ , 保证了曲面的光滑性,证明如下:

证明

由于

$$\begin{cases} z_x = p = z(1-z) \sum_{i=1}^n \left\{ w_i \cdot u_i \cdot \left[ -\frac{(x-c_{xi})}{\sigma_{xi}^2} \right] \right\} \\ z_y = q = z(1-z) \sum_{i=1}^n \left\{ w_i \cdot u_i \cdot \left[ -\frac{(y-c_{yi})}{\sigma_{yi}^2} \right] \right\} \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} z_{xy} &= \frac{\partial p}{\partial y} \\ &= z(1-z) \sum_{i=1}^n \left[ w_i \cdot u_i \cdot \frac{-(x-c_{xi})}{\sigma_{xi}^2} \cdot \frac{-(y-c_{yi})}{\sigma_{yi}^2} \right] + \\ &\quad z(1-z) \sum_{i=1}^n \left[ w_i \cdot u_i \cdot \frac{-(x-c_{xi})}{\sigma_{xi}^2} \right] \cdot \\ &\quad (1-2z) \sum_{i=1}^n \left[ w_i \cdot u_i \cdot \frac{-(y-c_{yi})}{\sigma_{yi}^2} \right] \\ &= z(1-z) \sum_{i=1}^n \left[ \frac{(x-c_{xi})(y-c_{yi})w_i u_i}{\sigma_{xi}^2 \cdot \sigma_{yi}^2} \right] + \\ &\quad z(1-z) \sum_{i=1}^n \left[ w_i \cdot u_i \cdot \frac{-(y-c_{yi})}{\sigma_{yi}^2} \right] \times \\ &\quad (1-2z) \sum_{i=1}^n \left[ w_i \cdot u_i \cdot \frac{-(x-c_{xi})}{\sigma_{xi}^2} \right] \\ z_{yx} &= \frac{\partial q}{\partial x} \\ &= z(1-z) \sum_{i=1}^n \left[ w_i \cdot u_i \cdot \frac{-(y-c_{yi})}{\sigma_{yi}^2} \cdot \frac{-(x-c_{xi})}{\sigma_{xi}^2} \right] + \\ &\quad z(1-z) \sum_{i=1}^n \left[ w_i \cdot u_i \cdot \frac{-(y-c_{yi})}{\sigma_{yi}^2} \right] \cdot \\ &\quad (1-2z) \sum_{i=1}^n \left[ w_i \cdot u_i \cdot \frac{-(x-c_{xi})}{\sigma_{xi}^2} \right] \\ &= z(1-z) \sum_{i=1}^n \left[ \frac{(x-c_{xi})(y-c_{yi})w_i u_i}{\sigma_{xi}^2 \cdot \sigma_{yi}^2} \right] + \\ &\quad z(1-z) \sum_{i=1}^n \left[ w_i \cdot u_i \cdot \frac{-(y-c_{yi})}{\sigma_{yi}^2} \right] \times \\ &\quad (1-2z) \sum_{i=1}^n \left[ w_i \cdot u_i \cdot \frac{-(x-c_{xi})}{\sigma_{xi}^2} \right] \end{aligned}$$

由求出的  $z_{xy}, z_{yx}$  公式知道,无论参数  $\sigma_{xi}, \sigma_{yi}, c_{xi}, c_{yi}, w_i$  如何变化,该算法都能恒保证  $z_{xy} = z_{yx}$ 。

该算法的另外一个优点是通过图像中行列网络点训练出的曲面拟合公式是一个连续公式,可以输入区域内(包括图像上行列网络中相邻之间的点)任意一点坐标  $(x, y)$ , 利用训练好的网络,直接计算出其对应的高度值,无需额外拟合或内插算法,当生成加工路径进行雕刻加工时无需再做曲面拟合,按照步距要求和加工运动的方向就满足数控刀具路径的要求。

### 2.2 径向基函数中心和宽度的影响

径向基函数的中心和宽度的调节对于形状的恢复产生很大的影响,以图 1 合成图像花瓶(光源方向  $p_s = 0, q_s = 0$ ) 为例,在学习之前,无法准确确定径向基函数中心和宽度,所以初始化时将径向基函数的中心按米字状均匀地分布于整幅图像,宽度设为 0.125,如图 4(a) 所示。如果在网络的学习过程中只调整权因子,而不调整径向基函数中心和宽度,恢复的曲

面形状如图 3(a) 所示;如果在学习过程中,在调整权因子的同时,也调整径向基函数的中心和宽度,调整之后的径向基函数中心分布位置如图 4(b) 所示,恢复的曲面形状如图 3(b) 所示。与物体的实际形状相比,图 3(a) 存在明显的差别,恢复的高度的平均误差是 0.185 608,图 3(b) 的形状与物体的实际形状几乎一模一样,恢复的高度的平均误差为 0.021 545。在该实验中初始化时,径向基函数中心共取 40 个节点,限于篇幅,表 1 中只列出水平线上 10 个节点(序号为 1~10)、左下角至右上角之间连线上 10 个节点(序号为 11~20)的中心和宽度值。从表中值的变化来看,初始化时中心呈均匀分布,宽度都相等,经过学习过程调整之后,中心在原有位置附近进行了变动,且水平方向和垂直方向宽度并非对称,从恢复的曲面形状和曲面的高度误差来看,对径向基函数中心和宽度进行调整对图像的恢复具有明显的优点。

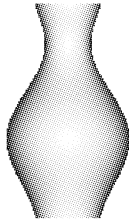


图 1 花瓶的合成图像

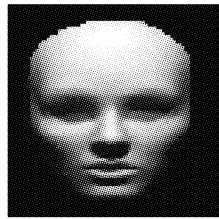


图 2 面具真实图像

### 3 实例

合成图像是根据反射函数生成的,具有严格的规律性,为了验证本算法的正确性及有效性,在本文的研究中,对如图 2 所示面具真实图像,分别采用本文方法, Tsai 方法, Lee 和 Rosenfeld, Bichsel 和 Pentland 进行三维形状恢复实验比较,恢复的曲面效果图如图 5 所示。从图中可以看出,无论是恢复的效果,还是恢复的曲面的光滑性和连续性,本文的方法明显优于其他方法。

### 4 结语

本文提出的新算法是用径向基函数网络先构造一个三维恢复形状的曲面方程,通过输出对两个输入的偏导数即梯度满足光照反射方程作为约束条件对曲面方程的系数进行调整,同时在网络的学习过程中不断调节径向基函数的中心和宽度,得到最终的曲面方程,实验结果表明本文的算法对于光照图像给出了一个理想的恢复效果,恢复的曲面更具有光滑

表 1 RBF 中心和宽度在学习之前和之后值比较一览表

	RBF 中心和宽度初始值				RBF 中心和宽度学习之后值			
	$C_{xi}$	$C_{yi}$	$\sigma_{xi}$	$\sigma_{yi}$	$C_{xi}$	$C_{yi}$	$\sigma_{xi}$	$\sigma_{yi}$
1	-0.5000	-0.5000	0.1250	0.1250	-0.489	-0.497	0.159	0.124
2	-0.3889	-0.3889	0.1250	0.1250	-0.345	-0.455	0.098	0.144
3	-0.3889	-0.3889	0.1250	0.1250	-0.280	-0.280	0.145	0.136
4	-0.1667	-0.1667	0.1250	0.1250	-0.180	-0.186	0.188	0.220
5	-0.0556	-0.0556	0.1250	0.1250	-0.052	-0.068	0.176	0.185
6	0.0556	0.0556	0.1250	0.1250	0.062	0.057	0.149	0.123
7	0.1667	0.1667	0.1250	0.1250	0.171	0.169	0.104	0.111
8	0.2778	0.2778	0.1250	0.1250	0.240	0.343	0.058	0.133
9	0.3889	0.3889	0.1250	0.1250	0.368	0.371	0.120	0.146
10	0.5000	0.5000	0.1250	0.1250	0.502	0.501	0.113	0.124
11	-0.500	0.000	0.1250	0.1250	-0.499	0.001	0.125	0.138
12	-0.389	0.000	0.1250	0.1250	-0.338	-0.041	0.039	0.194
13	-0.278	0.000	0.1250	0.1250	-0.269	-0.006	0.132	0.129
14	-0.167	0.000	0.1250	0.1250	-0.184	0.000	0.172	0.182
15	-0.056	0.000	0.1250	0.1250	-0.054	-0.014	0.161	0.181
16	0.056	0.000	0.1250	0.1250	0.056	-0.015	0.169	0.187
17	0.167	0.000	0.1250	0.1250	0.173	-0.006	0.182	0.187
18	0.278	0.000	0.1250	0.1250	0.268	-0.008	0.140	0.135
19	0.389	0.000	0.1250	0.1250	0.331	-0.042	0.037	0.198
20	0.500	0.000	0.1250	0.1250	0.499	-0.002	0.124	0.140

性和连续性,计算精度优于以往的算法,不足之处在图像的边界处产生的一定误差,在网络学习过程中增加图像边界约束将是下一步研究的重点。

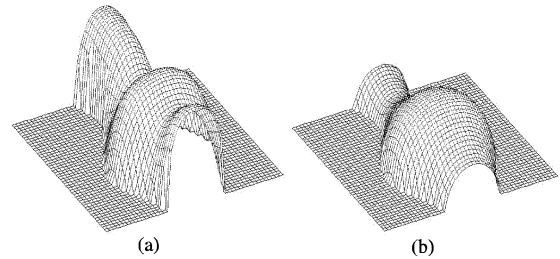


图 3 RBF 中心和宽度不调整和调整恢复曲面

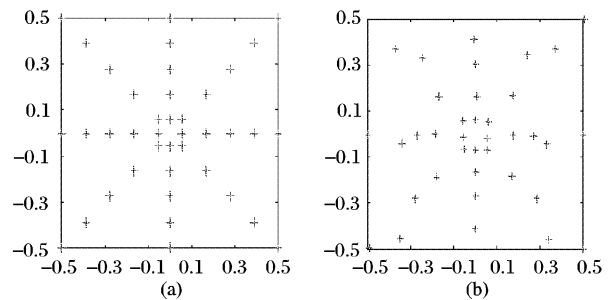


图 4 RBF 中心位置调整前后分布

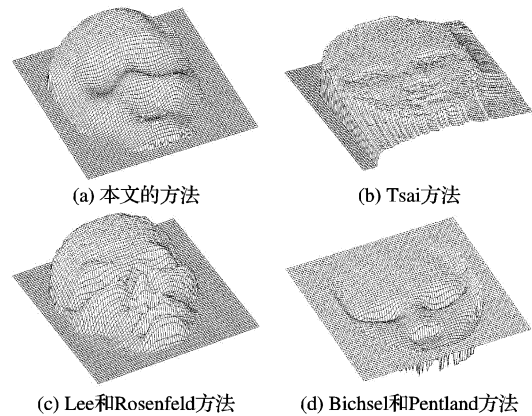


图 5 不同 SFS 方法对面具的恢复效果

### 参考文献:

- [1] HORN BKP. Shape from Shading: A Method for Obtaining the Shape of Smooth Opaque Object from One View[ R]. MAC TR-79 and AI-TR-232, Artificial Intelligence Laboratory, MIT, 1970.
- [2] IKEUCHI K, HORN BKP. Numerical Shape from Shading and Occluding Boundaries[ J]. Artificial Intelligent, 1981, 17(8): 141 - 184.
- [3] ZHENG Q, CHELLAPPA RAMA. Estimation of Illuminant Direction Albedo, and Shape from shading[ J]. IEEE Transactions on pattern analysis and Machine Intelligence, 1991, 13(7): 680 - 702.
- [4] BICHSEL M, PENTLAND AP. A Simple Algorithm from Shape from Shading[ A]. IEEE Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition[ C]. 1992. 459 - 465.
- [5] DUPUIS P, OLIENSIS J. Direct Method for Reconstructing Shape from Shading[ A]. Proceeding Computer Vision Pattern Recognition[ C]. 1992. 453 - 458.
- [6] LEE CH, ROSENFELD A. Improve Methods of Estimating Shape from Shading using the Light Source Coordinate System[ J]. Artificial Intelligence, 1985, 26(2): 125 - 143.
- [7] TSAI PS, SHAH M. Shape from Shading using Linear approximation[ J]. Image and Vision Computing Journal, 1994, 12(8): 487 - 498.
- [8] PENTLAND A. Shape Information from: A Theoy about Human Perception[ A]. Proceedings of International Conference on Computer Vision[ C]. 1988. 403 - 413.