

文章编号:1001-9081(2006)12-2832-03

非均匀采样曲线的支持向量机重建

江 力, 胡永祥

(湖南工业大学 计算机科学与技术系, 湖南 株洲 412008)

(jiangli9918@163.com)

摘 要:简要介绍了回归支持向量机的理论,根据框架理论导出了非均匀采样曲线能够完全重建的条件,在此基础上分别利用框架迭代算法和回归支持向量机对平移不变空间中的同一非均匀采样曲线进行重建,重建结果表明若用回归支持向量机方法对平移不变空间中的非均匀采样曲线进行稳定重建则采样集须满足由框架理论导出的完全重建条件。

关键词:支持向量机;平移不变空间;非均匀采样;曲线重建;框架算法

中图分类号:TP391.41 **文献标识码:**A

Reconstruction of support vector machines for non-uniform sampled curve

JIANG Li, HU Yong-xiang

(Department of Computer Science and Technology, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412008, China)

Abstract: Theories of regression Support Vector Machines (SVM) were briefly introduced, and then the conditions for the complete reconstruction of non-uniformly sampled curve was deduced by frame theory. Based on the above mentioned, the same non-uniformly sampled curve was reconstructed by using frame iterative algorithm and regression support vector machines method respectively, and the reconstruction results show if the regression support vector machines method can reconstruct non-uniformly sampled curve stably, some necessary conditions must be fulfilled for the sampled data set.

Key words: Support Vector Machines (SVM); shift-invariant spaces; non-uniform sampling; curve reconstruction; frame algorithm

0 引言

曲线重建问题实质就是函数逼近问题,而从信号处理的角度来看就是信号重建问题:1)当采样集满足什么条件时,信号能够由它在采样集上的采样值稳定而且唯一地重建;2)如何设计快速稳定的重建算法来重建信号。信息传输中的数据丢失、存储数据的硬件损坏、采样设备的限制等都会导致采样数据是非均匀的。对非均匀采样集要满足怎样的条件,才能稳定重建信号,这一问题有广泛的应用背景。文献[1]研究了平移不变空间的非均匀采样问题,文献[2,3]讨论了小波子空间的非均匀采样问题。文献[4]提出了一种基于支持向量机的曲线重建方法,其仿真实验是对均匀采样曲线的重建,该文没有讨论采样集对重建结果的影响。

本文基于框架算法的稳定性理论给出了平移不变子空间中非均匀采样曲线能够完全重建的定理,并用迭代算法和回归支持向量机对是否满足该定理中条件的非均匀采样曲线分别进行了重建。重建的结果表明,回归支持向量机是能够对非均匀采样曲线进行重建的,其采样集也需要满足该定理中的条件才能被稳定地、唯一地重建。

1 非均匀采样的框架理论

定义 1^[5] 称一个序列 $\{f_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 是一个可分 Hilbert 空间 H 的框架,若存在常数 $0 < A \leq B$,使得对任意 $f(x) \in H$,都有:

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, f_n \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (1)$$

其中 A, B 是与 f 无关的常数,称为框架界。

设采样节点为 $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$, 采样值为 $\{f(x_n)\}$, 为了能够从采样值稳定而且唯一地重建信号 $f(x)$, 采样值要满足^[6,7]:

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(x_n)|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (2)$$

定义 2^[1] $W(L^p)$ 空间。当 $1 \leq p \leq \infty$, $f(x)$ 满足:

$$\|f\|_{W(L^p)} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{esssup}_{x \in [0,1]} \left\{ |f(x+k)|^p \right\} \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \quad (3)$$

当 $p = \infty$ 时,称 $f(x) \in W(L^\infty)$, 若 $f(x)$ 满足:

$$\|f\|_{W(L^\infty)} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \operatorname{esssup}_{x \in [0,1]} \left\{ |f(x+k)| \right\} \right\} \quad (4)$$

设 C 是连续函数空间,记 $W_0(L^p) = C \cap W(L^p)$ 。

定义 3^[1] 平移不变空间。

$$V^p[\varphi] \triangleq \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(x-k) \mid \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^p < +\infty, 1 \leq p < \infty \right\} \quad (5)$$

定理 1 设 $\varphi(x) \in W_0(L^1)$, $1 \leq p \leq \infty$, 且存在常数 $m_p > 0, M_p > 0$, 使得:

$$m_p \|c\|_{l^p}^p \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(x-k) \right\|_{L^p}^p \leq M_p \|c\|_{l^p}^p \quad (6)$$

$\{x_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 为采样集, $\lim_{j \rightarrow \pm \infty} x_j = \pm \infty$, 并存在 $\delta > 0, d > 0$

使得 $0 < d \leq x_{j+1} - x_j < \delta < 1$, 若 δ 满足 $\| \operatorname{osc}_\delta(\varphi) \|_{W(L^1)}^p <$

$\frac{m_p}{2^{p-1}}$, 则对任意 $f(x) \in V^p[\varphi]$ 有:

收稿日期:2006-06-26;修订日期:2006-08-24 基金项目:湖南省自然科学基金资助项目(05JJ30122)。

作者简介:江力(1969-),男,湖南耒阳人,副教授,硕士,主要研究方向:图形与图像信号处理、小波分析; 胡永祥(1973-),男,湖南安化人,讲师,硕士,主要研究方向:图形图像处理。

$$\frac{1}{2^{p-1}\delta} \left(1 - \frac{2^{p-1}}{m_p} \| \text{osc}_\delta(\varphi) \|_{W(L^1)}^p \right) \|f\|_{L^p}^p \leq \sum_{j \in Z} |f(x_j)|^p \leq \frac{1}{d} \left(\frac{2^{p-1}}{m_p} \| \text{osc}_\delta(\varphi) \|_{W(L^1)}^p + 2^{p-1} \right) \|f\|_{L^p}^p \quad (7)$$

其中 $\text{osc}_\delta(\varphi)(x) = \sup_{|y| \leq \delta} |\varphi(x+y) - \varphi(x)|$ 是 $\varphi(x)$ 的连续模。

证明 当 $x \in [x_j, x_{j+1}]$ 时, 有 $|f(x_j)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x)|$, 当 $p > 1$ 时, x^p 是 $[a, b]$ 上的凹函数, 所以 $|f(x_j)|^p \leq 2^{p-1} |f(x) - f(x_j)|^p + 2^{p-1} |f(x)|^p$, 从 x_j 到 x_{j+1} 积分, 有:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |f(x_j)|^p dx \leq 2^{p-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |f(x) - f(x_j)|^p dx + 2^{p-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |f(x)|^p dx \leq 2^{p-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |\text{osc}_\delta(f)(x)|^p dx + 2^{p-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |f(x)|^p dx$$

两边关于 j 求和得:

$$\begin{aligned} d \sum_{j \in Z} |f(x_j)|^p &\leq 2^{p-1} \| \text{osc}_\delta(f) \|_{L^p}^p + 2^{p-1} \|f\|_{L^p}^p \leq \\ 2^{p-1} \| \text{osc}_\delta(f) \|_{W(L^p)}^p + 2^{p-1} \|f\|_{L^p}^p &\leq \\ 2^{p-1} \|c\|_{L^p}^p \| \text{osc}_\delta(\varphi) \|_{W(L^1)}^p + 2^{p-1} \|f\|_{L^p}^p &\leq \\ 2^{p-1} \frac{1}{m_p} \| \text{osc}_\delta(\varphi) \|_{W(L^1)}^p \|f\|_{L^p}^p + 2^{p-1} \|f\|_{L^p}^p &\leq \\ \left(\frac{2^{p-1}}{m_p} \| \text{osc}_\delta(\varphi) \|_{W(L^1)}^p + 2^{p-1} \right) \|f\|_{L^p}^p \end{aligned}$$

此即(7)式的右边, 同理根据 $|f(x)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j)|$ 和条件 $\| \text{osc}_\delta(\varphi) \|_{W(L^1)}^p < \frac{m_p}{2^{p-1}}$ 可以证明(7)式的左边。

2 非均匀采样曲线的迭代重建

定理 1 证明了对于空间 $V^p[\varphi]$, 当 φ 及采样集满足适当的条件时, $f(x)$ 能够由其采样值稳定而且唯一地重建。

设 $\chi_{j,1}(x) = \chi_{[x_j, \frac{x_j+x_{j+1}}{2}]}$, $\chi_{j,2}(x) = \chi_{[\frac{x_j+x_{j+1}}{2}, x_{j+1}]}$, 则有: $\text{supp } \chi_{j,i}(x) \cap \text{supp } \chi_{k,l}(x) = \emptyset, j \neq k, i \neq l, i, l = 1, 2$ 与 $\sum_{i \in Z} \sum_{j=1}^2 \chi_{j,i}(x) = 1$ 。

设 $Q[f(x)] = \sum_{j \in Z} f(x_j) \chi_{j,1}(x) + \sum_{j \in Z} f(x_{j+1}) \chi_{j,2}(x)$, P 是正交投影算子, $P: L^p(R) \rightarrow V^p(\varphi)$ 。

定理 2 若 $\varphi(x) \in W_0(L^1)$, $1 \leq p < \infty$, 采样集 $\{x_j, j \in Z\}$ 及 δ 满足定理 1 的条件, 则对任意 $f(x) \in V^p[\varphi]$, 下面的迭代算法收敛:

$$\begin{cases} f_1 = PQ[f(x)] \\ f_{n+1} = f_n + PQ(f - f_n) \end{cases}$$

且有:

$$\|f - f_{n+1}\|_{L^p} \leq \left(\frac{1}{\sqrt[p]{m_p}} \| \text{osc}_\delta(\varphi) \|_{W(L^1)} \right)^n \|f - f_1\|_{L^p} \quad (8)$$

证明 见参考文献[1] 定理 6.1。

3 回归支持向量机

自从文献[8]提出支持向量机理论以来, 由于其出色的

泛化能力, 已在函数逼近、信号处理、图像分类识别等方面取得了越来越多的进展^[9~11]。为了简化支持向量机的训练, 降低其计算复杂度, 文献[12]提出了序列最小优化(Sequential Minimal Optimization, SMO)方法, 其主要思想是把一个大的优化问题分解成一系列只含有两个变量的优化问题。在此基础上文献[13]提出了回归支持向量机(Regression Support Vector Machines, RSVM)的 SMO 算法。对于回归问题, 给定训练样本 $x_i \in R^n, y_i \in R, i = 1, \dots, l$, 采用式(9) 拟合样本集:

$$f(x) = w^T \Phi(x) + b \quad (9)$$

这里 $\Phi(\cdot)$ 是由输入空间到特征空间的非线性映射, w 是与特征空间中向量同维数的权向量, b 是阈值常数, $f(\cdot)$ 在特征空间中表示为一个线性函数。RSVM 的目的是用函数 $f(\cdot)$ 去拟合数据样本, 同时保证能得到很好的泛化能力。应用 ε -不灵敏损失函数^[8], RSVM 可归结为解以下约束优化问题^[13]:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l (\alpha_i - \alpha_i') (\alpha_j - \alpha_j') k(x_i, x_j) + \\ & \varepsilon \sum_{i=1}^l (\alpha_i + \alpha_i') - \sum_{i=1}^l y_i (\alpha_i - \alpha_i') \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{s. t. } \sum_{i=1}^l (\alpha_i - \alpha_i') = 0, 0 \leq \alpha_i, \alpha_i' \leq C, i = 1, \dots, l$$

$C > 0$ 是函数复杂度与损失误差的一个平衡量, $k(x_i, x_j) = \Phi(x_i)^T \Phi(x_j)$ 是核函数。RSVM 的输出为:

$$f(x) = \sum_{i=1}^l (\alpha_i - \alpha_i') k(x_i, x) + b \quad (11)$$

4 非均匀采样曲线的重建结果

4.1 迭代重建的结果

根据定理 2 用迭代算法重建非均匀采样的函数空间 $V^2[N_3(x)]$ (这里 $N_3(x)$ 是 3 阶 B 样条函数) 中函数:

$$f(x) = N_3(x) + 0.5N_3(x-1) + 0.2N_3(x-2) \quad (12)$$

由文献[5]可知:

$$0 < A_3 \leq \sum_{k \in Z} |\hat{N}_3(\omega + 2\pi k)|^2 \leq 1 \quad (13)$$

其中 A_3 是文献[5] 中的公式(4.2.21) 定义的正数。

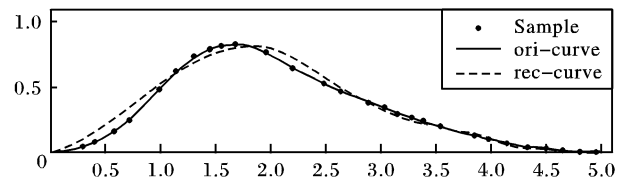


图 1 根据定理 2 重建的 $f(x)$, $\delta = 0.34$

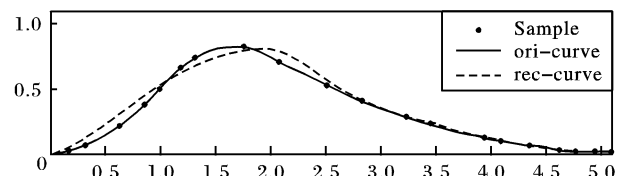


图 2 根据定理 2 重建的 $f(x)$, $\delta = 0.50$

由 $N_3(x)$ 的定义可知, $N_3(x) \in W_0(L^1)$, 根据式(13) 可知 $N_3(x)$ 满足式(6)^[1], 由(12) 得: $\|c\|_{L^2}^2 = 1.29$, $\|f(x)\|_{L^2}^2 = 0.9729 = 1.29 \times 0.7542 = 0.7542 \|c\|_{L^2}^2$, 取 $m_2 = 0.7542$, 选择 $\delta = 0.34$, 则满足 $\| \text{osc}_\delta(N_3) \|_{W(L^1)}^2 \approx 0.3728 < \frac{m_2}{2} = 0.3771$, 任取 $d > 0$, 使得采样集满足 $d \leq x_{j+1} - x_j < \delta$ 。图 1 中“•”是样本点, 虚线是按定理 2 重建的结果, 实

线是 $f(x)$ 的图形;选取 $\delta = 0.5$,另取采样集满足 $d \leq x_{j+1} - x_j < \delta$,则因 $\|osc_\delta(N_3)\|_{W(L^1)}^2 \approx 0.7225 > 0.3771$,根据定理1此时不能稳定重建 $f(x)$ 。图2中“•”是新样本点,虚线也是按定理2重建的结果,实线是 $f(x)$ 的图形。

4.2 RSVM 重建结果

用RSVM方法重建(12)中的函数 $f(x)$,RSVM中的核为高斯核函数($\sigma^2 = 6$),参数 $C = 50, \varepsilon = 0.005$,将图1与图2中的两个采样集分别作为RSVM的训练集,重建的结果分别如图3、图4所示,其中“•”是样本点,“○”是支持向量,虚线是重建的结果,实线是 $f(x)$ 的图形。

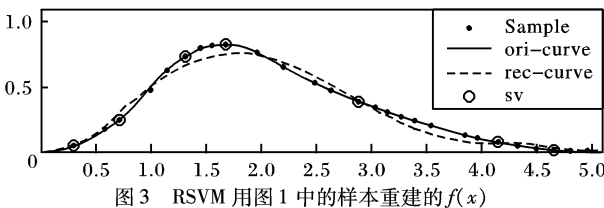


图3 RSVM用图1中的样本重建的 $f(x)$

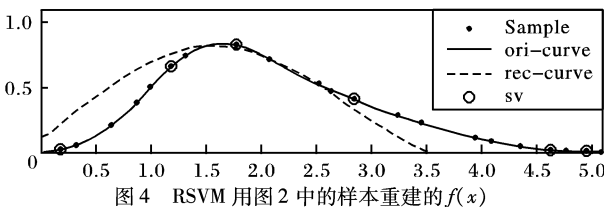


图4 RSVM用图2中的样本重建的 $f(x)$

4.3 重建结果分析

图1~图4的重建误差如表1,从表1、图1~图4以及取不同的 δ 的多次实验可知:当 δ 满足定理1的条件时,两种方法重建的误差都较小,重建的效果较好;此时,迭代法重建的曲线其平均误差较RSVM方法重建的要小,但光滑程度较RSVM方法重建的要差些;此时两种方法重建的结果都稳定、唯一,且多次实验表明此时重建的效果并不会因减少 δ 而有明显的改善。当 δ 不满足定理1的条件时,随着 δ 的增大,迭代法重建的曲线其误差显著增大,且重建的曲线呈现不稳定性,实验与理论分析相符合;此时RSVM方法重建的曲线呈现剧烈的波动性,重建的曲线的稳定性较迭代法的更差。

表1 图1~图4的重建误差

图序	δ	重建方法	最大误差	平均误差
1	0.34	迭代	0.1063	0.0310
2	0.50	迭代	0.1442	0.0527
3	0.34	RSVM	0.1226	0.0670
4	0.50	RSVM	0.2382	0.0849

5 结语

针对平移不变空间的非均匀采样问题,根据框架理论导出非均匀采样信号能够稳定重建的定理1,对与文献[1]中定理6.1类似的定理2给出了其中的收敛因子 C 的一个解析表达式;用框架算法和RSVM方法对是否满足定理1中的条件的采样集分别进行重建,比较了重建效果。实验结果表明,当用RSVM方法对非均匀采样的信号能进行稳定重建时,其采样集需满足定理1的条件,且此时重建的曲线较用迭代法重建的光滑程度较高。由于仅由一些支持向量就可以重建曲线,因此RSVM将在信号的压缩传输中具有较大的优越性。

参考文献:

- [1] ALDROUBI A, GROCHENIG K. Non-uniform sampling and reconstruction in shift-invariant spaces[J]. SIAM Rev, 2001, 43(4): 585-620.
- [2] LIU YM. Irregular sampling for spline wavelet subspaces[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1996, 42(2): 623-627.
- [3] CHEN W, ITOH S, SHIKI J. Irregular sampling theorem for wavelet subspaces[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1998, 44(3): 1131-1142.
- [4] 王国锋,刘岩,李言俊.基于支持向量机的曲线重建方法[J].西北工业大学学报,2004,22(1):33-35.
- [5] (美)崔锦泰.小波分析导论[M].程正兴,译.西安:西安交通大学出版社,1992.
- [6] LANDAU HJ. Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire function[J]. Acta Math., 1967, 117: 37-52.
- [7] JIA RQ. Stability of the shifts of a finite number of functions[J]. Journal of Approximation Theory archive, 1998, 95(2): 194-288.
- [8] VAPNIK VN. The Nature of Statistical Learning Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1995.
- [9] VAPNIK VN, GOLOWICH S, SMOLA A. Support vector method for function approximation, regression estimation and signal processing [A]. Advances in Neural Information Processing Systems[C]. Cambridge: MIT Press, 1997. 281-287.
- [10] CHAPPELLE O, HAFNER P, VAPNIK VN. Support vector machines for histogram based image classification[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1999, 10(5): 1055-1064.
- [11] 张莉,周伟达,焦李成.用于一维图像识别的支撑向量机方法[J].红外与毫米波学报,2002,21(2):119-123.
- [12] PLATT JC. Fast training of support vector machines using sequential minimal optimization[A]. Scholkopf B, Burges C, Smola A, eds. Advances in Kernel Methods: Support Vector Machines[C]. Cambridge: MIT Press, 1998. 185-208.
- [13] SMOLA AJ. Learning with kernels[D]. Ph. D, Berlin: University of Berlinghoven, 1998.

(上接第2831页)

- [6] WANG JH, LIU WJ, LIN D. Histogram-based fuzzy filter for image restoration[J]. Transactions on Systems, Man, and Cybernetic, 2002, 32(2): 230-238.
- [7] POK G, LIU JC, NAIR AS. Selective removal of impulsive noise based on homogeneity level information[J]. IEEE Transactions Image Process, 2003, 12(1): 85-92.
- [8] CHAN RH, HO CW, NIKOLAY M. Salt-and-Pepper noise removal by Median-Type noise detectors and detail-preserving regularization [J]. IEEE Transactions Image Process, 2005, 14(10): 1479-1485.
- [9] CHARBONNIER P, BLANC-FERAUD L, AUBERT G, et al. Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging[J].

IEEE Transactions on Image Processing, 1997, 6(3): 298-311.

- [10] VOGEL CR, OMAN ME. Fast, robust total variation-based reconstruction of noisy, blurred images[J]. IEEE Transactions Image Process, 1998, 7(6): 813-824.
- [11] LEE CS, HSU CY, KUO YH. Intelligent fuzzy image filter for impulse noise removal[A]. Proceedings of IEEE International Conference Fuzzy System, 2002, Vol 1: 431-436.
- [12] JAFARI-KHOZANI K, SOLTANIAN-ZADEH H. Rotation Invariant Multiresolution Texture Analysis Using Radon and Wavelet Transforms[J]. IEEE transactions on image processing, 2005, 14(6).