

文章编号:1001-9081(2006)12-2988-03

## 基于 Lukasiewicz $t$ -模的模糊双向联想记忆网络的有效学习算法

曾水玲<sup>1,2</sup>, 徐蔚鸿<sup>1,2</sup>

(1. 吉首大学 数学与计算机科学学院, 湖南 吉首 416000;

2. 长沙理工大学 计算机与通信工程学院, 湖南 长沙 410077)

**摘 要:**利用  $t$ -模的伴随蕴涵算子, 为基于 Max 和  $T_L$  合成的模糊双向联想记忆网络 Max- $T_L$  FBAM 提供了一种新的学习算法, 此处  $T_L$  是 Lukasiewicz  $t$ -模算子。从理论上严格证明了, 只要存在有连接权矩阵对使得任意给定的模式对集成为 Max- $T_L$  FBAM 的平衡态集, 则依该学习算法所确定的连接权矩阵对是所有这样的连接权矩阵对中的最大者。并用实验验证该学习算法的有效性。

**关键词:**伴随蕴涵算子; 模糊双向联想记忆网络; 学习算法;  $t$ -模

**中图分类号:** TP18 **文献标识码:** A

## Efficient learning algorithm for Fuzzy bi-directional associative memory based on Lukasiewicz's $t$ -Norm

ZENG Shui-ling<sup>1,2</sup>, XU Wei-hong<sup>1,2</sup>

(1. College of Mathematics and Computer Science, Jishou University, Jishou Hunan 416000, China;

2. College of Computer and Communications Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan 410077, China)

**Abstract:** Taking advantage of the concomitant implication operator of  $T_L$ , which is a  $t$ -norm, a simple efficient learning algorithm was proposed for the fuzzy bi-directional associative memory based on fuzzy composition of Max and  $T_L$  (Max- $T_L$  FBAM). It is proved theoretically that, if there is a connected weight matrix which make arbitrarily given pattern pairs set become stability state set of Max- $T_L$  FBAM, then the proposed learning algorithm can find the maximum of all connected weight matrices. An experiment was given to test the effectiveness of the presented learning algorithm.

**Key words:** concomitant implication operator; Fuzzy bi-directional associative memory; learning algorithm;  $t$ -norm

### 0 引言

二层最大最小模糊联想记忆网络是一种前馈神经网络模型<sup>[1,2]</sup>, 其目的是将其用于记忆多值模糊模式对。这种神经网络采用模糊 Hebb 学习规则, 呈现出子集回想特性, 但它仍不能保证可靠地存储多个模糊模式对。所以学者们需要寻找性能较优的学习算法<sup>[3]</sup>, 以克服模糊 Hebb 学习规则的局限性, 并对该网络的稳定性、容错性、收敛性和存储容量<sup>[4-7]</sup>进行较深入的研究。虽然已经基于各种不同的应用提出了许多不同的模糊神经网络模型<sup>[8-11]</sup>, 但由于现实世界的复杂性和多样性, 随着实际问题不同, 信息提取的粗细程度和处理方式有不同要求, 需要根据具体的问题而选用不同的算子, 以及更多的模糊神经网络模型来满足实际问题的需要。在文献[12]中利用伴随蕴涵算子概念, 为 Max- $T_L$  FBAM 模型提出一种有效的解析型学习算法。但是利用  $t$ -模算子和相应伴随蕴涵算子构造模糊双向联想记忆网络 (Fuzzy Bi-directional Associative Memory, FBAM), 对该网络的学习算法尚未进行研究, 为此本文针对 Lukasiewicz  $t$ -模算子为 Max- $T_L$  FBAM 模型提出一种有效的学习算法。

### 1 相关概念和引理

假设  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $J = \{1, 2, \dots, m\}$  和  $K = \{1, 2, \dots, p\}$  为非空有限下标集;  $\emptyset$  为空集; 定义向量  $X1 = (x1_1, x1_2, \dots,$

$x1_m)$  和  $X2 = (x2_1, x2_2, \dots, x2_m)$  的海明距离为  $H(X1, X2) = \bigvee_{i \in I} |x1_i - x2_i|$ ; 对于模糊矩阵  $W1 = (w1_{ij})_{n \times m}$ ,  $W2 = (w2_{ij})_{n \times m}$ , 引入“ $\leq$ ”的概念, 即  $W1 \leq W2$  指  $w1_{ij} \leq w2_{ij}$ ,  $\forall i \in I, j \in J$ ; 矩阵对  $(W1, U1) \leq (W2, U2)$  指  $W1 \leq W2, U1 \leq U2$ 。

**定义 1**<sup>[13]</sup> 若映射  $T: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  满足:

(1) 边界性:  $0T0 = 0, 1T1 = 1$ 。

(2) 单调增:  $\forall a, b, c, d \in [0, 1]$ , 若  $a \leq c, b \leq d$ , 则  $aTb \leq cTd$ 。

(3) 交换律:  $\forall a, b \in [0, 1], aTb = bTa$ 。

(4) 结合律:  $\forall a, b, c \in [0, 1], aT(bTc) = (aTb)Tc$ 。此时称  $T$  为三角模。

**定义 2**<sup>[12]</sup> 三角模  $T$  满足  $\forall a \in [0, 1], aT1 = a$ , 则称  $T$  为  $t$ -模。

**定义 3** 设  $T$  是一个  $t$ -模, 则  $T$  的伴随蕴涵算子定义为:  $\forall a, b \in [0, 1]$

$$aR_T b = \begin{cases} \bigvee_{x \in [0, 1]} \{x \mid aTx \leq b\} & \text{if } \{x \in [0, 1] \mid aTx \leq b\} \neq \emptyset \\ 0 & \text{if } \{x \in [0, 1] \mid aTx \leq b\} = \emptyset \end{cases}$$

对于 Lukasiewicz 算子  $aT_L b = aLb = (a + b - 1) \vee 0$ , 其伴随蕴涵算子依定义为:  $aR_L b = (1 - a + b) \wedge 1$ 。

**定义 4**  $\forall a, b_q \in [0, 1]$ , 总有  $aT_L[\bigvee_{q \in Q} b_q] = \bigvee_{q \in Q} [aT_L b_q]$ ,  $aT_L[\bigwedge_{q \in Q} b_q] = \bigwedge_{q \in Q} [aT_L b_q]$  成立, 则称  $T_L$  是连续的。此处  $\vee$  和  $\wedge$  分别表示上确界和下确界。

收稿日期: 2006-06-26; 修订日期: 2006-08-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (60474070); 湖南省自然科学基金资助项目 (05JJ40004); 湖南省教育厅科研基金资助项目 (04C509)

作者简介: 曾水玲 (1975-), 女, 湖南湘潭人, 讲师, 硕士研究生, 主要研究方向: 神经网络、模式识别; 徐蔚鸿 (1963-), 男, 湖南湘潭人, 副教授, 博士, 主要研究方向: 智能系统、模式识别和软件工程。

## 引理 1

(1)  $aR_L b$  关于  $a$  单调减, 关于  $b$  单调增。

(2) 因为  $T_L$  是连续的, 且  $\{x \in [0, 1] \mid aT_L x \leq b\} \neq \emptyset$ ,

则  $aT_L(aR_L b) \leq b$ 。

(3)  $T_L$  是连续的, 则  $bR_L(bT_L w) \geq w$ 。

证明

(1) 仅证  $aR_L b$  关于  $b$  单调增。令  $x^* = aR_L b, \forall b_1, b_2 \in [0, 1], b_1 \leq b_2$ :

(a) 当  $\{x \in [0, 1] \mid aT_L x \leq b_1\} \neq \emptyset$  时, 因由  $aT_L x \leq b_1$  能推出  $aT_L x \leq b_2$ , 故  $\{x \in [0, 1] \mid aT_L x \leq b_2\} \supseteq \{x \in [0, 1] \mid aT_L x \leq b_1\}$ , 故  $\{x \in [0, 1] \mid aT_L x \leq b_2\} \neq \emptyset$ , 此时  $aR_L b_1 = \bigvee_{x \in [0, 1]} \{x \mid aT_L x \leq b_1\} \leq \bigvee_{x \in [0, 1]} \{x \mid aT_L x \leq b_2\} = aR_L b_2$ 。

(b) 当  $\{x \in [0, 1] \mid aT_L x \leq b_1\} = \emptyset$  时, 依定义  $aR_L b_1 = 0$ , 故总有  $aR_L b_1 \leq aR_L b_2$ 。

(2) 令  $x^* = aR_L b$ , 当  $\{x \in [0, 1] \mid aT_L x \leq b\} \neq \emptyset$  时, 则  $\forall x' \in \{x \in [0, 1] \mid aT_L x \leq b\}, aT_L x' \leq b$ ; 又  $aT_L(aR_L b) = aT_L x^* = aT_L[\bigvee_{x' \in \{x \in [0, 1] \mid aT_L x' \leq b\}} x'] = \bigvee_{x'} (aT_L x') \leq \bigvee_{x'} b = b$ 。

(3) 因  $aT_L w \leq aT_L w$ , 故  $w \in \{x \mid aT_L x \leq aT_L w\}$ , 所以  $aR_L(aT_L w) = \bigvee_{x \in [0, 1]} \{x \mid aT_L x \leq aT_L w\} \geq w$ 。

证毕。

$W_{1 \times m}$  和  $W_{2 \times k}$  的 Max-T<sub>L</sub>FBAM 合成  $^T$  是指  $(W_1 \circ^T W_2)_{ij} = \bigvee_{u=1}^m (w_{1u} T_L w_{2u})$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k$ 。

2 Max-T<sub>L</sub>FBAM 的一个有效学习算法

Max-T<sub>L</sub>FBAM 的从  $X$  端到  $Y$  端的连接权矩阵为  $W = (w_{ij})_{n \times m}$ , 从  $Y$  端到  $X$  端的连接权矩阵为  $U = (u_{ji})_{m \times n}$ , 节点间连接线上的运算为  $T_L$ 。Max-T<sub>L</sub>FBAM 的拓扑结构如图 1 所示。Max-T<sub>L</sub>FBAM 的工作方式无论是由  $X$  端的任意初始态  $X_0$  激发, 还是由  $Y$  端的任意初始态  $Y_0$  激发, 网络的产生的状态序列都可概括为:

$$\begin{aligned} Y_t &= (Y_{t-1} \circ^T U) \circ^T W \\ &= Y_{t-1} \circ^T (U \circ^T W) \\ &= Y_0 \circ^T (U \circ^T W)^t \\ X_t &= (X_{t-1} \circ^T W) \circ^T U \\ &= X_{t-1} \circ^T (W \circ^T U) \\ &= X_0 \circ^T (W \circ^T U)^t \end{aligned}$$

其中  $t \geq 0$ , 并规定  $A^0 =$  单位矩阵  $E$ 。

定义 5 若  $\begin{cases} B = A \circ^T W \\ A = B \circ^T U \end{cases}$  成立, 则称  $(A, B)$  为

Max-T<sub>L</sub>FBAM 的平衡态。

Max-T<sub>L</sub>FBAM 的学习算法的目的, 就是对任意给定的模式对集合确定网络的连接权矩阵对  $(W, U)$ , 以尽量使得该模式对集合中的每个模式对都是 Max-T<sub>L</sub>FBAM 的平衡态。

假设 Max-T<sub>L</sub>FBAM 的任意训练模式对集合  $set = \{(A_k, B_k) \mid A_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}), B_k = (b_{k1}, b_{k2}, \dots, b_{km}), k \in K\}$ , 对

于一类 Max-T<sub>L</sub>FBAM 提出的学习算法如下:

第 1 步: 对第  $k \in K$  个模式  $(A_k, B_k)$ , 计算临时连接权矩阵对  $(W_k, U_k)$ :

$$W_k = (w_{ij}^{(k)})_{n \times m} = (a_{ki} R_L b_{kj})_{n \times m}$$

$$U_k = (u_{ji}^{(k)})_{m \times n} = (b_{kj} R_L a_{ki})_{m \times n}$$

第 2 步: 用模糊交运算  $\cap$  分别组合以上各临时矩阵  $W_k$  和  $U_k$ , 得到最终的权值矩阵对  $(W, U)$ :

$$W = \bigcap_{k \in K} W_k = (\bigwedge_{k \in K} (a_{ki} R_L b_{kj}))_{n \times m}$$

$$U = \bigcap_{k \in K} U_k = (\bigwedge_{k \in K} (b_{kj} R_L a_{ki}))_{m \times n}$$

则称此学习算法为 Max-T<sub>L</sub>FBAM 网络的最大权值学习算法, 该算法的以下性质说明了此名称的合理性。

定理 1 设  $set = \{(A_k, B_k) \mid k \in K\}$  是训练模式集, 若存在有连接权矩阵对使得  $set$  成为 Max-T<sub>L</sub>FBAM 的平衡态集, 则依以上学习算法所确定的连接权矩阵对  $(\bar{W}, \bar{U})$  是所有这样的连接权矩阵对中的最大者。

证明 记所有使得  $set$  成为 Max-T<sub>L</sub>FBAM 的平衡态集合的连接权矩阵对的集合为  $W(p)$ , 依假设  $W(p) \neq \emptyset$ 。设  $\forall (W', U') \in W(p) \neq \emptyset$ , 则有:  $\forall k \in K, i \in I, j \in J, b_{kj} = \bigvee_{i \in I} (a_{ki} T_L w'_{ij}), a_{ki} = \bigvee_{j \in J} (b_{kj} T_L u'_{ji})$  同时成立。从而  $a_{ki} T_L w'_{ij} \leq b_{kj}$ ,  $b_{kj} T_L u'_{ji} \leq a_{ki}$ 。故  $w'_{ij} \in \{x \mid a_{ki} T_L x \leq b_{kj}\} \neq \emptyset, u'_{ji} \in \{x \mid b_{kj} T_L x \leq a_{ki}\} \neq \emptyset$ 。

又对于  $\forall i \in I, j \in J$ , 有:

$$\bar{w}_{ij} = \bigwedge_{k \in K} (a_{ki} R_L b_{kj})$$

$$= \bigwedge_{k \in K} \{a_{ki} R_L [\bigvee_{s \in I} (a_{ks} T_L w'_{sj})]\}$$

$$\geq \bigwedge_{k \in K} \{a_{ki} R_L (a_{ki} T_L w'_{ij})\} \text{ (取 } s = i \text{ 及 } aR_L b \text{ 关于 } b \text{ 单调增)}$$

$$\geq \bigwedge_{k \in K} w'_{ij} \text{ (由引理 1 的结论(3))}$$

故  $\bar{w}_{ij} \geq w'_{ij}$ , 同理可证  $\bar{u}_{ji} \geq u'_{ji}$ , 故  $(\bar{W}, \bar{U}) \geq (W', U')$ 。

接着证明  $(\bar{W}, \bar{U}) \in W(p)$ , 即证  $\forall k \in K$ ,

$$\begin{cases} B_k = A_k \circ^T \bar{W} \\ A_k = B_k \circ^T \bar{U} \end{cases} \quad (1)$$

成立。

对于  $\forall k \in K, j \in J$ , 有:

$$b_{kj} = \bigvee_{i \in I} (a_{ki} T_L \bar{w}_{ij})$$

$$= \bigvee_{i \in I} [a_{ki} T_L [\bigwedge_{h \in K} (a_{hi} R_L b_{hj})]]$$

$$\leq \bigvee_{i \in I} [a_{ki} T_L (a_{ki} R_L b_{kj})] \text{ (取 } h = k \text{ 及 } T_L \text{ 关于变元单调增)}$$

$$\leq \bigvee_{i \in I} b_{kj} \text{ (由引理 1 的结论(2))}$$

$$= b_{kj}$$

(2)

同时对于  $\forall k \in K, i \in I$ , 也有:

$$a_{ki} = \bigvee_{j \in J} (b_{kj} T_L \bar{u}_{ji})$$

$$\geq \bigvee_{j \in J} (a_{ki} T_L w'_{ij}) \text{ (因已证明 } \bar{W} \geq W')$$

$$= b_{kj} \text{ (由 } W' \text{ 的定义)}$$

(3)

故由(2)和(3)式有  $\forall k \in K, j \in J, \bar{b}_{kj} = b_{kj}$ 。

又  $\forall k \in K, i \in I$ , 有:

$$\bar{a}_{ki} = \bigvee_{j \in J} (b_{kj} T_L \bar{u}_{ji})$$

$$= \bigvee_{j \in J} [b_{kj} T_L [\bigwedge_{h \in K} (b_{hj} R_L a_{hi})]]$$

$$\leq \bigvee_{j \in J} [b_{kj} T_L (b_{kj} R_L a_{ki})] \text{ (取 } h = k, \text{ 及 } T_L \text{ 关于变元单调增)}$$

$$\leq \bigvee_{j \in J} a_{ki} \text{ (由引理 1 的结论(2))}$$

$$= a_{ki}$$

(4)

$$\bar{a}_{ki} = \bigvee_{j \in J} (b_{kj} T_L \bar{u}_{ji})$$

$$\geq \bigvee_{j \in J} (b_{kj} T_L u'_{ji}) \text{ (因已证明 } \bar{U} \geq U')$$

$$= a_{ki} \text{ (由 } U' \text{ 的定义)}$$

(5)

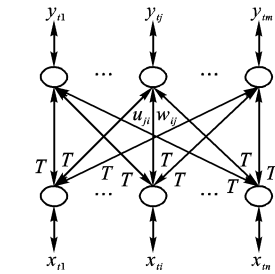


图 1 Max-T<sub>L</sub>FBAM 的拓扑结构  
(连接线上的算子  $T$  是  $T_L$ )

故由(4)和(5)式有  $\forall k \in K, i \in I, \bar{a}_{ki} = a_{ki}$ , 即  $(\bar{W}, \bar{U})$  使得(1)式成立, 故  $(\bar{W}, \bar{U}) \in W(p)$ 。

证毕。

本定理直接给出了连接权矩阵对的解析表达式, 故同时也解决了给定的训练模式集  $set = \{(A_k, B_k) | k \in K\}$  是否可以成为 Max-TLFBAM 的平衡态集的判定问题, 我们只需把  $(\bar{W}, \bar{U})$  代入(1)式, 看是否使其成立即可。

### 3 实验

实验步骤:(1)设能成为 Max-TLFBAM 的平衡态集的训练模式集, 如表 1 所示。

(2)利用本文提出的学习算法, 计算得到 Max-TLFBAM 的连接权矩阵对, 如表 2 所示。

(3)根据文献[1]的网络模型(Max-MinFBAM)和模糊Hebb学习规则以及表 1 中的训练模式集, 计算得到连接权矩阵对, 如表 3 所示。但是此时表 1 中的训练模式集不能被该网络完整可靠地存储。

表 1 能成为 Max-TLFBAM 的平衡态集的训练模式对集

$k$	$A_k$				$B_k$			
1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.2	0.3	0.4	0.5
2	0.4	0.5	0.6	0.7	0.4	0.5	0.6	0.7
3	0.5	0.6	0.7	0.8	0.5	0.6	0.7	0.8
4	0.3	0.4	0.5	0.6	0.3	0.4	0.5	0.6
5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.6	0.7	0.8	0.9

表 2 连接权矩阵对 1

$W_{4 \times 4}$					$U_{4 \times 4}$			
1	1	1	1	1	1	1	1	1
0.9	1	1	1	0.9	1	1	1	1
0.8	0.9	1	1	0.8	0.9	1	1	1
0.7	0.8	0.9	1	0.7	0.8	0.9	1	1

表 3 连接权矩阵对 2

$W_{4 \times 4}$					$U_{4 \times 4}$			
0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
0.6	0.7	0.7	0.7	0.6	0.7	0.7	0.7	0.7
0.6	0.7	0.8	0.8	0.6	0.7	0.8	0.8	0.8
0.6	0.7	0.8	0.9	0.6	0.7	0.8	0.9	0.9

实验结果表明:(1)只要任意给定的模式对集能成为Max-

TLFBAM 的平衡态集, 则本文提出的算法一定能找到所有使该模式对集成为平衡态集的连接权矩阵对中的最大者。(2)在实验中能被 Max-TLFBAM 可靠存储的模式对集却不能被 Max-MinFBAM 可靠存储, 这也说明了 Max-TLFBAM 的价值。

### 4 结语

本文提出的学习算法直接给出了连接权的解析表达式, 故可以用作判别给定模式对集是否可能成为相应的 Max-TLFBAM 的平衡态集, 对带有此最大连接权矩阵对的网络的性能分析也提供了方便。另外, 该学习算法对其他的 t-模 T, Max-TFBAM 也适用。

#### 参考文献:

- [1] KOSKO B. Bidirectional associative memory in fuzzy expert systems [M]. Addison Wesley, 1987.
- [2] KOSKO B. Bidirectional associative memory[J]. IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics, 1988, 18(1): 49-60.
- [3] 舒桂清, 肖平. 模糊联想记忆网络的增强学习算法[J]. 中国图形图象学报, 2003, 8(1): 84-89.
- [4] BELOHLAVEK R. Fuzzy logical bi-directional associative memory[J]. Information Science, 2000, 128(1): 91-103.
- [5] CHENG QS, FAN ZT. The stability problem for fuzzy bi-directional associative memories[J]. Fuzzy sets and systems, 2002, 132(1): 83-90.
- [6] 范周田, 钟义信. 模糊双向联想记忆网络的收敛性[J]. 电子学报, 2000, 28(4): 127-130.
- [7] 孙学全, 冯英俊. 多层感知器的灵敏度分析[J]. 计算机学报, 2001, 24(9): 952-958.
- [8] 陈松灿, 夏开军. 内连式复值双向联想记忆模型及性能分析[J]. 软件学报, 2002, 13(3): 433-437.
- [9] 修春波, 刘向东, 张宇河, 等. 一种新的双向联想记忆的学习算法[J]. 小型微型计算机系统, 2005, 26(6): 976-978.
- [10] 王敏, 王士同, 吴小俊. 新模糊形态学联想记忆网络的初步研究[J]. 电子学报, 2003, 31(5): 690-693.
- [11] 李换琴, 万百五. 大规模前馈神经网络的一种有效学习算法及其应用[J]. 信息与控制, 2003, 32(5): 403-407.
- [12] 程思蔚, 徐蔚鸿, 王勇, 等. 基于爱因斯坦 t-模的模糊联想记忆网络的学习算法[J]. 计算机工程与应用, 2006, 42(15): 40-41, 44.
- [13] 王士同. 神经模糊系统及其应用[M]. 北京: 北京航空航天大学, 1998.

(上接第 2987 页)

仍有一些多粒度时间下的数据挖掘问题值得我们研究。如: 如何自动选取最合适的模板来表示周期模式, 多粒度时间下近似周期的挖掘算法, 噪音的处理, 时态自动机在周期挖掘的应用。我们将继续进行这方面的研究。

#### 参考文献:

- [1] HAN J, DONG G, YIN Y. Efficient Mining of Partial Periodic Patterns in Time Series Databases[A]. Proceedings of 1999 International Conference on Data Engineering[C]. Sydney, Australia, 1999.
- [2] BERBERIDIS C, WALID AG, ATALLAH M. Multiple and Partial Periodicity Mining in Time Series Databases[A]. Proceedings of 15th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI 2002) [C]. Lyon, France: IOS Press, 2002. 370-374.
- [3] YANG J, WANG W, YU PS. Mining Asynchronous Periodic Patterns

in Time Series Data[J]. IEEE Transactions Knowledge and Data Engineering, 2003, 15(3): 613-28.

- [4] YANG J, WANG W, YU PS. Discovering Higher Order Periodic Patterns[J]. Knowledge and Information Systems, 2004, 6(3): 243-268.
- [5] 孟志青. 时态数据挖掘中的时态型与时间粒度研究[J]. 湘潭大学自然科学学报, 2000, 22(3): 1-4.
- [6] LI YG, WANG X, JAJODIA S. Discovering Temporal Patterns in Multiple Granularities[A]. Lecture Notes in Computer Science[C]. London, UK: Springer-Verlag, 2001, Vol 2007: 5-19.
- [7] BETTINI C, WANG X, JAJODIA S, et al. Discovering Frequent Event Patterns with Multiple Granularities in Time Sequences[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 1998, 10(2): 222-237.