

文章编号:1001-9081(2006)04-0784-03

FCM 算法用于灰度图像分割的初始化方法的研究

匡泰^{1,2}, 朱清新¹, 孙跃²

(1. 电子科技大学 计算机科学与技术学院, 四川 成都 610054;

2. 温州大学 信息科学与工程学院, 浙江 温州 325035)

(kuangtai@yeah.net)

摘要:模糊 C 均值聚类(FCM)算法是一种经典的模糊聚类分析方法,但其算法初始聚类中心集是随机选取的,从而造成算法的性能强烈的依赖聚类中心集的初始化。提出了一种改进的基于多项式求解的 FCM(PFCM)算法,该算法基于求解多项式的根来确定数据集初始聚类中心集,很好地解决了数据初始聚类中心集问题,使数据初始聚类中心集代表了数据集类别的特征,在此基础上,采用 FCM 算法得到聚类中心集的近似最优解。

关键词:模糊 C 均值聚类算法;PFCM;图像分割

中图分类号: TP391.41 **文献标识码:** A

Research on initialization of image segmentation with FCM algorithm

KUANG Tai^{1,2}, ZHU Qing-xin¹, SUN Yue²

(1. College of Computer Science and Technology, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu Sichuan 610054, China;

2. College of Information Science and Engineering, Wenzhou University, Wenzhou Zhejiang 325007, China)

Abstract: Fuzzy C-Means (FCM) algorithm is one of the most popular methods of clustering analysis. However, the traditional FCM algorithm does not work well because its initial clustering central collection is the stochastic selection. An efficient PFCM algorithm was proposed. Based on the solving multinomial root, the PFCM algorithm solved question of initial clustering central collection of data set. The experiment result demonstrates its effectiveness.

Key words: Fuzzy C-Means (FCM) algorithm; Polynomial Fuzzy C-Mean (PFCM); image segmentation

0 引言

模糊聚类分析是非监督模式识别的主要技术之一。模糊 C 均值聚类(Fuzzy C-means, FCM)算法^[1]在理论上和应用上为其他各种模糊聚类分析方法奠定了基础。该算法广泛应用于特征分析、模式识别、图像处理与分析,智能信息处理等领域^[2,3],它适用于具有椭圆状分布的数据的聚类。然而,FCM 算法(以及其他的目标函数聚类算法)本质上是一种局部搜索寻优技术,它的迭代过程采用了爬山技术来寻找最优解。因此该算法对初始化极为敏感,容易陷入局部极小值,而得不到全局最优解。FCM 算法在用于基于灰度图像分割时,由于聚类数目比较大,这一缺点尤为明显。因此,对于 FCM 算法来说,选择一个好的初始聚类中心集是非常重要的。如果选择一个好的初始聚类中心集,算法能够很快收敛于实际的类中心^[4]。

图 1 的例子表明:使用 FCM 算法,从远离实际类中心的三个初始类中心开始出发,需要七次迭代才能收敛到实际类中心。

图 2 的例子表明:使用 FCM 算法,从邻近实际类中心的三个初始类中心开始出发,只需要三次迭代就能收敛到实际类中心。

图 1 和图 2 表明:选择与实际类中心近似初始类中心能够减少算法的迭代次数和改善系统的性能。

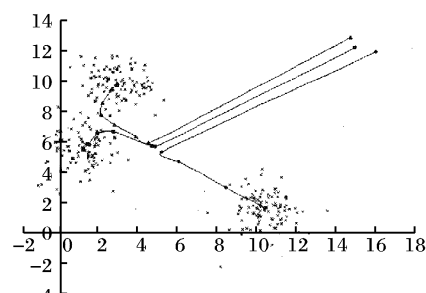


图 1 初始聚类中心远离实际类中心的迭代

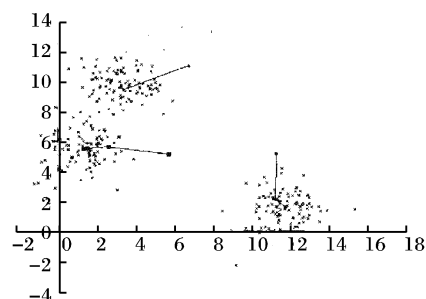


图 2 初始聚类中心邻近实际类中心的迭代

关于聚类中心初始化问题,文献[5]提出了利用高斯函数对灰度图像直方图函数作卷积平滑,再求极值的方法确定初始聚类中心集。文献[4]提出利用 k-d 树的方法先将原数据集分

收稿日期:2005-10-11

作者简介: 匡泰(1964-),男,江西泰和人,博士研究生,主要研究方向:计算机网络、计算机图形学、和数字图像处理及分析;朱清新(1953-),男,四川成都人,教授,博士生导师,主要研究方向:计算机视觉、网络安全、算法设计、最优控制与搜索;孙跃(1961-),男,浙江温州人,副教授,主要研究方向:医学图像处理和分。

成若干个数据子集,求出每个子集的质心,用所有子集的质心构成的子集作为原数据集的近似。然后对该子集采用 FCM 算法进行聚类,把求得的最终类中心集作为原数据集的初始化值。

本文提出了基于多项式确定初始聚类中心集的算法,该算法的思想是把类中心看成是多项式的根,通过求多项式的解来确定初始类中心集。

1 FCM 算法

1.1 算法思想

FCM 算法是把 n 个向量 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 分成 C 个模糊簇,并求得每个簇的聚类中心,使目标函数达到最小, $l < m < +\infty$, FCM 的目标函数定义为:

$$J_m(u, v) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^c (u_{ik})^m d(x_k, v_i) \quad (1)$$

这里, $\sum_{i=1}^c u_{ik} = 1, u_{ik} \in (0, 1), \forall k, d(x_k, v_i) = \|x_k - v_i\|^2$ 。与 C 均值算法不同的是,在目标函数中增加了模糊权重指数 m 。

为使目标函数达到最小,聚类中心和隶属度的更新如下:

$$v_i = \frac{\sum_{k=1}^n u_{ik}^m x_k}{\sum_{k=1}^n u_{ik}^m} \quad i = 1, 2, \dots, c \quad (2)$$

$$u_{ik} = \frac{1}{\sum_{j=1}^c \left(\frac{d_{ik}}{d_{jk}} \right)^{\frac{1}{m-1}}}, i = 1, 2, \dots, c; j = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

1.2 算法步骤

1) 从 n 个数据集 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 中,随机选取初始的聚类中心集 $V^0 = (v_1, v_2, \dots, v_c)$ 和阈值 $\varepsilon > 0$ 。

2) 重复下列操作,直到 $\|V^{b+1} - V^b\| < \varepsilon$ 为止, b 为当前迭代次数。

a) 使用当前的 V^b , 利用(3)式计算隶属度矩阵 U^b 。

b) 使用当前的 U^b , 利用(2)式计算聚类中心 V^{b+1} 。

由于初始聚类中心集是随机选取得,而造成算法的性能强烈的依赖算法的初始化。如何解决算法的初始化问题,是提高算法性能的一个途径。

2 基于多项式的初始化算法

本文提出基于求解多项式的根来确定数据集初始聚类中心。由于灰度图像的分割,通常是基于像素点的灰度值来分割图像的。因此,我们假设: $X \in R^N$ 表示图像所有像素点对应的灰度值构成的向量, $x_i \in X$ 是对应像素点的灰度值, N 表示像素点的个数。所以灰度图像的分割等价于把向量 X 的元素 x_i 分成 n 个组。

定义1 特征矢量分割

给定特征矢量 $X \in R^N$, 估计组数 n 和常量集 $\{u_j\}_{j=1}^n$ (u_j 是第 j 组的代表元) 把 x_i 分到 u_j 所代表的组中的过程称为特征矢量分割。由定义可知,特征矢量分割的关键就是确定组数 n 和常量集 $\{u_j\}_{j=1}^n$ 。

2.1 理想的特征矢量分割

在理想的情况下,假设 $x \in R$ 是矢量 $X \in R^N$ 的第 i 项元素,并且只取集 $\{u_j\}_{j=1}^n$ 中的某一值。这意味着:

$$(x = u_1) \vee (x = u_2) \vee \dots \vee (x = u_n) \quad (4)$$

这也可以完全写成下列 x 的 n 次多项式形式:

$$P_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - u_j) = \sum_{k=1}^n c_k x^k = 0 \quad (5)$$

由(5)式可知, u_j 是多项式 $p_n(x)$ 的根。如此,求组数 n 和常量集 $\{u_j\}_{j=1}^n$ 的问题转变成求解 n 次多项式 $p_n(x)$ 的根的问题。由于向量 X 的每一个元素的值满足(5)式,有下式成立:

$$L_n C = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (6)$$

这里 $L_n \in R^{N \times (n+1)}$ 是数据矩阵, $C \in R^{n+1}$ 是多项式 $p_n(x)$ 的系数矢量。要使(6)式中矢量 $C \in R^{n+1}$ 有唯一解,只有矩阵 L_n 的秩 $r(L_n) = n$ 。这种约束使我们能够通过特征矢量 $X \in R^N$ 来确定组数 n 的值。

定理1 设 $L_i \in R^{N \times (i+1)}$ 是 L_n 前 $i+1$ 列构成的矩阵,如果 $N \geq n$, 则:

$$r(L_i) = \begin{cases} > i & \text{若 } i < n \\ = i & \text{若 } i = n \\ < i & \text{若 } i > n \end{cases} \quad (7)$$

证明可参阅文献[8,9]。

由定理1可知,组数 n 可由下式确定:

$$n = \min \{i; r(L_i) = i\} \quad (8)$$

一旦确定了组数 n , 就可以使用(6)式可线性求出系数矢量 C 。最终,把 n 和 C 代入下式:

$$p_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - u_j) = \sum_{k=0}^n c_k x^k = 0 \quad (9)$$

作为多项式 $p_n(x)$ 的 n 个根,能得到 $\{u_j\}_{j=1}^n$ 。把矢量元素 i 分到 u_j 代表的组 j 中,这里的 j 指的是满足 $x_i = u_j$, 就可实现特征矢量的分割。

2.2 通常的特征矢量分割

在通常情况下,考虑一个给定含噪声的特征矢量 X 。假设 $x \in R$ 是矢量 $X \in R^N$ 的第 i 项元素,并且近似取集 $\{u_j\}_{j=1}^n$ 中的某一值。这意味着:

$$p_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - u_j) = \sum_{k=0}^n c_k x^k \approx 0 \quad (10)$$

同理有:

$$L_n C = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix} \approx 0 \quad (11)$$

这里 $L_n \in R^{N \times (n+1)}$ 是数据矩阵, $C \in R^{n+1}$ 是多项式 $p_n(x)$ 的系数矢量。由于(11)是近似等于零,为求解矢量 C , 建立如下目标函数:

$$E_A(C) = \sum_{i=1}^N (p_n(x_i))^2 = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{k=0}^n c_k x_i^k \right)^2 = \|L_n C\|^2 \quad (12)$$

显然使目标函数 $E_A(C)$ 取极小值的系数矢量 C 作为(11)的近似解是合理的。使(12)式取极小值的 C 也就是 L_n 的最小奇异值对应奇异向量^[10,11]。确定了向量 C , 通过求解多项式 $p_n(x)$ 的根,就可得到 $\{u_j\}_{j=1}^n$ 。把矢量元素 i 分到 u_j 代表的组 j 中,就可实现特征矢量的分割。这里的 j 指的是:

$$j = \arg \min_{1 \leq j \leq n} (x_i - u_j)^2 \quad (13)$$

但是通常情况下,组数 n 是未知的。不能直接使用(8)式

计算组数 n , 因为矩阵 L_n 也许是满秩 (对于任何 $i \geq 1$)。由矩阵的奇异分解^[11] 可知, L_n 可分解为:

$$L_n = U \begin{pmatrix} \sum_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^H \quad (14)$$

则 L_n 可表示为: $L_n = \sigma_1 u_1 v_1^H + \dots + \sigma_r u_r v_r^H$ ($\sum_r = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, σ_i 是 L_n 非零奇异值, $U = (u_1, \dots, u_m)$, $V = (v_1, \dots, v_s)$ 是酉矩阵), 与 L_n 相距最近的秩为 k 的矩阵就是将上式截取前 k 项: $L_k = \sigma_1 u_1 v_1^H + \dots + \sigma_k u_k v_k^H$ 。合理的选择 k , 可使 L_k 充分接近 L_n 。因此, 可设定一个阈值 $\varepsilon > 0$, 利用下式估计组数 n :

$$n = \min \{i: \sigma_{i+1} / \sigma_i < \varepsilon\} \quad (15)$$

这里 σ_i 是 L_i 的第 i 个奇异值。

2.3 算法步骤

假定 $X \in R^N$ 表示图像所有像素点对应的灰度值构成的向量, $x_i \in X$ 是对应像素点的灰度值, N 表示像素点的个数。我们可改进 FCM 算法, 称为 PFCM (Polynomial Fuzzy C-mean) 算法。

PFCM 算法步骤如下:

- 1) 给定 $\varepsilon > 0$, $b = 0$, 利用 (15) 式计算组数 n ;
- 2) 使用 (12) 式计算出系数向量 C ;
- 3) 由计算出的 C , 通过 (5) 式计算出多项式 $p_n(x)$ 的根 u_1, \dots, u_n ;
- 4) 将 $\{u_j\}_{j=1}^n$ 作为初始聚类中心集, 即: $V^0 = (v_1, v_2, \dots, v_c) = (u_1, u_2, \dots, u_n) (c = n)$;
- 5) 计算隶属度:

$$u_{ik}^b = \frac{1}{\sum_{j=1}^c \left(\frac{d_{ik}}{d_{jk}} \right)^{1/(m-1)}} \quad i = 1, 2, \dots, c; j = 1, 2, \dots, n$$

- 6) 使用当前的 u_{ik}^b 更新聚类中心:

$$v_i^{b+1} = \frac{\sum_{k=1}^n u_{ik}^m x_k}{\sum_{k=1}^n u_{ik}^m} \quad i = 1, 2, \dots, c$$

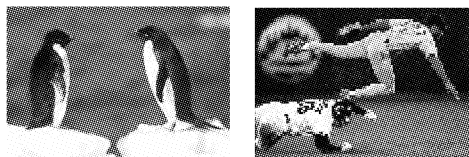
- 7) 如果 $\|V^{b+1} - V^b\| < \varepsilon$ 则停止, 否则使 $b = b + 1$, 转回 (5);

- 8) 求: $j = \arg \min_{l=1, \dots, n} (x_i - v_l)^2$;

- 9) 把第 i 点分到 v_j 所代表的模式中, 从而实现分割。

3 实验仿真分析

实验环境: 400MHz Pentium III PC, 采用 Matlab 编程实现。使用 FCM 和 PFCM 算法对企鹅和棒球灰度图像进行聚类分割, 原图像如图 3。



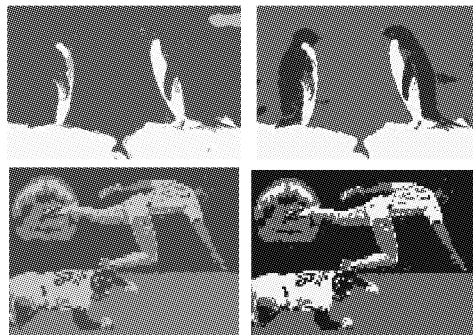
(a) 企鹅 (b) 棒球

图 3 用于分割的灰度图

为了作对比分析, 两种算法的聚类数目以 PFCM 确定的聚类数目为准。图 4 为分割结果, 从图 4 中看出 PFCM 算法分割结果明显好于 FCM 算法。

表 1 每个算法的执行时间

图像	尺寸/像素	算法执行时间/s	
		FCM	PFCM
企鹅	117 × 180	1.74	0.60
棒球	147 × 221	2.11	0.80



(a) FCM (b) PFCM

图 4 基于灰度值的分割结果

表 1 的数据表明: PFCM 算法比 FCM 算法执行速度快近三倍。

4 结语

实验表明 PFCM 算法明显好于 FCM 算法, PFCM 算法很好地解决了 FCM 算法聚类中心集初始化的问题。基于求解多项式的根来确定数据集初始聚类中心集, 使得初始的聚类中心较好地表征了数据集中数据的类别, 在此基础上, 采用 FCM 算法只需要很少的步骤就可得到聚类中心集的近似最优解。

参考文献:

- [1] BEZDEK JC. Pattern recognition with fuzzy objective function algorithms[J]. Plenum Press, New York, 1981.
- [2] CLARK MC, HALL LO. MRI segmentation using fuzzy clustering techniques: integrating knowledge[J/OL]. <http://www.csee.usf.edu/>, 1995.
- [3] LIM YW, LEE SU. On the Color Image Segmentation Algorithm Based on the Thresholding and the Fuzzy cmeans Techniques[J]. Pattern Recognition, 1990, 23(9): 935-951.
- [4] HUNG MC, YANG DL. An Efficient Fuzzy C-Means Clustering Algorithm[A]. IEEE. International Conference on Data Mining (ICDM 2001)[C]. California, USA, 2001. 225-232.
- [5] DUNN JC. A fuzzy relative of the ISODATA process and its use in detecting compact well-separated clusters[J]. Journal of Cybernetics, 1973, 3(1), 32-57.
- [6] 丁震, 胡钟山, 杨静宇, 等. FCM 算法用于灰度图像分割的研究[J]. 电子学报, 1997, 25(5): 39-43.
- [7] BEZDEK JC. Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms[M]. New York, Plenum Press, 1981. 43-93.
- [8] VIDAL RE. Generalized Principal Component Analysis (GPCA): an Algebraic Geometric Approach to Subspace Clustering and Motion Segmentation[D]. PhD thesis, University of California at Berkeley, 2003.
- [9] LANG S. Algebra[M]. 3rd edition. Addison-Wesley Publishing Company, 1993.
- [10] 黄廷祝, 钟守铭, 李正良. 矩阵理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [11] 刘慧, 袁文燕, 姜冬青. 矩阵论及应用[M]. 北京: 化学工业出版社, 2001.