

文章编号:1001-9081(2006)07-1620-03

基于多项式变换的二维整型离散余弦变换快速算法

李艳辉, 李军

(暨南大学珠海学院 计算机系, 广东 珠海 519070)

(tlljyh@jnu.edu.cn)

摘要: 提出了一种基于多项式变换的二维整型离散余弦变换(DCT)快速算法, 利用多项式变换将二维 DCT 变换的计算转化为一系列一维 DCT 变换及其变换系数的求和运算, 减少了乘法和加法的计算量; 利用提升矩阵, 实现了整型 DCT 变换, 进一步提高了运算效率的同时, 使信号可精确重构。

关键词: 视频压缩; 多项式变换; 离散余弦变换

中图分类号: TP391.41 **文献标识码:**A

Fast algorithm for integer 2D-DCT based on polynomial transform

LI Yan-hui, LI Jun

(Department of Computer, Zhuhai School of Jinan University, Zhuhai Guangdong 519070, China)

Abstract: A polynomial transform-based fast algorithm for integer 2D Discrete Cosine Transform (2D-DCT) was proposed. The 2D-DCT was transformed to some 1D-DCT and summing calculation by polynomial transform, so the computational complexity was reduced. The integer DCT was implemented by lifting matrix to promote efficiency, and the transformed signal could be reconstructed completely.

Key words: video compression; polynomial transform; Discrete Cosine Transform(DCT)

0 引言

对高清晰度、高压缩率的视频需求正在高速增长, 离散余弦变换作为视频压缩技术的重要组成部分, 起到了关键作用。这一方面是因为对于真实图像而言, DCT 变换是最接近 K-L 变换的正交变换, 去相关的效果良好; 另一方面 DCT 变换算法简单, 编码效率高, 易于硬件实现。因此, DCT 算法成为很多图像和视频国际标准(JPEG, H.26X, MPEG-1/2/4 等)的核心算法。

由于计算机用有限字长表示浮点数, 浮点 DCT 算法在运算过程中产生舍入误差, 因此是不可逆的, 这限制了它在数据无损压缩中的应用。另外, 在不同的机器上对同一数据进行 DCT 变换, 其结果有微小的差异, 造成同一视频在不同的设备上的显示效果有差异。这些都不利于高清晰度视频的压缩。

因为 DCT 是视频编码器的重要组成部分, DCT 算法的性能对整个视频编码器的效率具有重要影响, 因此, 提出了一种基于多项式变换的二维整型 DCT 快速算法, 既能实现信号的完全重构, 同时也提高了计算效率。

1 算法设计

使 DCT 矩阵乘以适当的放大因子, 然后用整型数代替浮点型的矩阵元素, 可以实现整型 DCT 变换。近年来, 通过分解 DCT 矩阵, 然后用提升矩阵乘积来构造整型 DCT 的方法逐渐成为研究热点^[1~3], 与过去的方法相比, 这种方法除了具有完全重构的特点外, 计算效率得到了提高, 同时易于硬件实现。

在图像和视频处理应用中主要使用二维 DCT 变换, 一般地, 通过一维整型 DCT 变换和行列算法可以实现二维整型 DCT 变换。根据二维 DCT 矩阵元素的规律性, 二维 ($N \times N$)

DCT 变换的计算可以转化为 N 个一维 DCT 变换及其变换系数的求和运算, 其中求和运算可以通过多项式变换计算^[4], 减少了加法运算量。一维 DCT 矩阵可以分解为若干个旋转矩阵, 进一步可转化为提升矩阵, 实现了整型 DCT 变换^[5,6]。整型 DCT 变换能够完全重构, 同时由于定点数的运算比浮点数的运算快得多, 整型 DCT 比浮点 DCT 的运算速度快, 具有很好的适用性。

在求解 2D-DCT 的过程中仅含有加法和提升矩阵的运算, 所以在有限字长运算时, 2D-DCT 反变换可精确重构输入信号。为了叙述和推导的方便, 若不加说明, 所提到的 DCT 变换都是非归一化的。所得到的变换结果乘以归一化因子, 可以得到正交归一的变换结果; 特别地, 如果 DCT 变换的结果需要量化处理, 则归一化因子与量化步长合并以减少计算量^[7]。

综上所述, 二维整型 DCT 快速算法的步骤为: 1) 对输入的 $N \times N$ 矩阵, 按照重新排列的顺序执行 N 个 1D-DCT 变换; 2) 进行多项式变换; 3) 根据变换后多项式的系数进行 2D-DCT。

2 二维 DCT 算法的转换

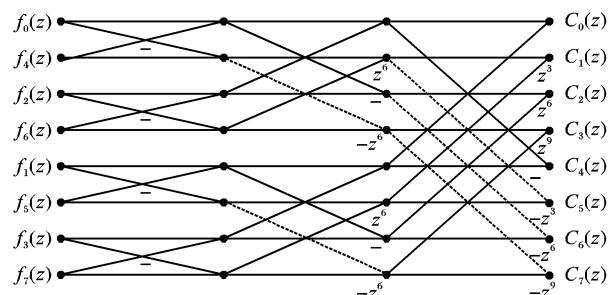


图 1 快速多项式变换算法流程

利用多项式变换可将二维 DCT 算法转换成一系列一维

收稿日期: 2006-02-13; 修订日期: 2006-04-21 基金项目: 暨南大学引进人才基金资助项目(04JZKY004)

作者简介: 李艳辉(1979-), 女, 湖南邵阳人, 硕士, 主要研究方向: 图像处理、CAD; 李军(1973-), 男, 内蒙古赤峰人, 讲师, 博士, 主要研究方向: 视频信号处理、编译理论。

的 DCT 变换,与行列法不同的是可以更有效地减少计算量。

二维 DCT 算法可表示为:

$$\begin{aligned} X(k,l) = & \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(n,m) \cdot \cos \frac{(2n+1)k\pi}{2N} \\ & \cos \frac{(2m+1)l\pi}{2N} \quad k,l = 0,1,\dots,N-1 \end{aligned} \quad (1)$$

若将输入 $x(n,m)$ 重新排列为:

$$y(n,m) = x(2n,2m)$$

$$y(N-n-1,m) = x(2n+1,2m)$$

$$y(n,N-m-1) = x(2n,2m+1)$$

$$y(N-n-1,N-m-1) = x(2n+1,2m+1)$$

其中: $m,n = 0,1,\dots,N/2-1$

则 $X(k,l)$ 可表示为:

$$\begin{aligned} X(k,l) = & \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} y(n,m) \cdot \cos \frac{(4n+1)k\pi}{2N} \\ & \cos \frac{(4m+1)l\pi}{2N} \quad k,l = 0,1,\dots,N-1 \end{aligned}$$

设 $p(m) = [(4p+1) \cdot m + p] \bmod N$ 则:

$$X(k,l) = [A(k,l) + B(k,l)]/2$$

其中:

$$A(k,l) =$$

$$\sum_{p=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} y(p(m),m) \cos \frac{(4m+1)[(4p+1)k+l]\pi}{2N} \quad (2)$$

$$B(k,l) =$$

$$\sum_{p=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} y(p(m),m) \cos \frac{(4m+1)[(4p+1)k-l]\pi}{2N} \quad (3)$$

$$\text{令: } D_p(i) = \sum_{m=0}^{N-1} y(p(m),m) \cos \frac{(4m+1)i\pi}{2N}$$

$p,i = 0,1,\dots,N-1$

$$\text{则: } A(k,l) = \sum_{p=0}^{N-1} D_p[(4p+1)k+l],$$

$$B(k,l) = \sum_{p=0}^{N-1} D_p[(4p+1)k-l]$$

若重新排列 $y(p(m),m)$ 为 $y(2m) = y(p(m),m), y(2m+$

1) = $y(p(N-m-1),N-m-1), m = 0,1,\dots,N/2-1$, 则:

$$D_p(i) = \sum_{m=0}^{N-1} y(m) \cos \frac{(2m+1)i\pi}{2N}, m = 0,1,\dots,N-1 \quad (4)$$

式(4)表示一维 DCT 变换。这样,就将式(1)的二维

DCT 算法转换成一系列一维的 DCT 变换。

通过多项式变换的方法,可以减少求 $A(k,l)$ 和 $B(k,l)$ 所需的加法运算次数。由 $A(k,l), B(k,l)$ 为系数生成多项式:

$$\begin{aligned} X_k(z) &= \sum_{l=0}^{N-1} B(k,l) z^l - \sum_{l=N}^{2N-1} A(k,2N-l) z^l \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{2N-1} D_p[(4p+1)k-l] z^l \bmod z^{2N} + l \\ &= C_k(z) z^k \bmod z^{2N} + 1 \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $C_k(z) = f_p(z) z^{3pk} \bmod z^{2N} + 1, f_p(z) = \sum_{i=0}^{2N-1} D_p(i) z^i \bmod z^{2N} + 1, k = 0,1,\dots,N-1$ 。注意到 $C_{N-k}(z) = C_k(z^{-1}) \bmod z^{2N} + 1$, 根据该对称性和多项式变换的快速算法,多项式变换 $C_k(z)$ 的计算流程如图1所示,其中虚线是不需要实际计算的步骤。这样,计算多项式变换 $C_k(z)$ 从而得到 $X_k(z)$,然后通过 $X_k(z)$ 的系数,可以求得二维 DCT 变换的结果 $X(k,l)$ 。

3 整型 DCT 变换的实现

一维整型 DCT 变换是实现二维整型 DCT 变换的基础,好的一维 DCT 算法可以有效地提升二维 DCT 的性能。对 $N(N = 2^i, i \geq 2)$ 点 DCT 变换,可以用迭代算法分解为 2×2 的旋转矩阵运算和蝶型运算,其算法复杂度约为倍长 DFT 算法的 $1/6$ 。设 1D-DCT 变换为:

$$\begin{aligned} [X] &= [A_N][x] \\ [A_N] &= [c(k) \cdot \cos(2i+1)k\pi/(2N)] \\ i,k &= 0,1,\dots,N-1 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{其中: } c(k) = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & k = 0 \\ 1, & k = 1,2,\dots,N-1 \end{cases}$$

如果将 $[A_N]$ 的行序按照位反转的次序重排位 U_N ,则 $[A_N]$ 可以写成迭代形式:

$$[A_N] = [P_r][U_N] = [P_r] \begin{bmatrix} U_{N/2} & 0 \\ 0 & V_{N/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{N/2} & \bar{I}_{N/2} \\ \bar{I}_{N/2} & -I_{N/2} \end{bmatrix}$$

其中 P_r 为行交换矩阵, $I_{N/2}$ 为单位矩阵, $\bar{I}_{N/2}$ 为 $I_{N/2}$ 的左右(上下)反转矩阵:

$$[V_{N/2}] = [c(k) \cdot \cos \frac{(2i+1)(2k+1)\pi}{2N}]$$

$$i,k = 0,1,\dots,N/2-1$$

图2用8点 DCT 变换为例说明了 DCT 矩阵的因子化过程。

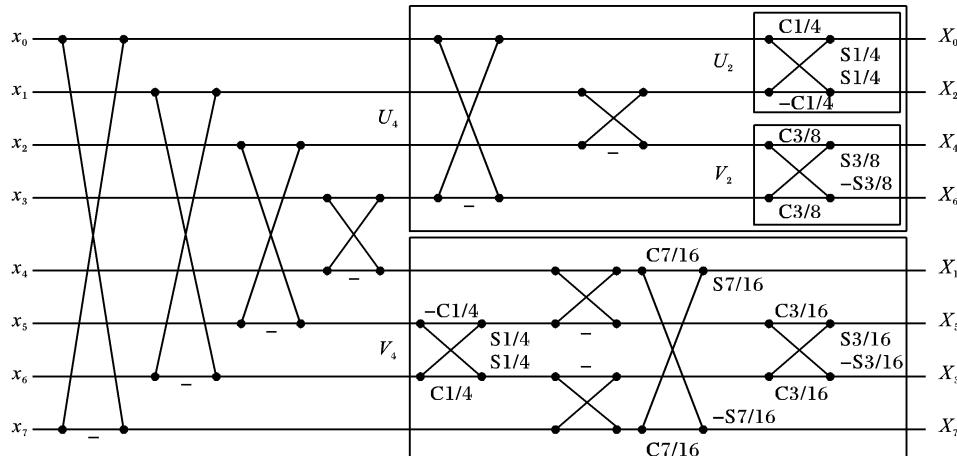


图2 1D-DCT 矩阵的因子化

图2中 2×2 的旋转矩阵可以分解为提升矩阵:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$p = (\cos\alpha - 1)/\sin\alpha, u = \sin\alpha \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} -\cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -p \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$p = (1 - \cos\alpha)/\sin\alpha, u = \sin\alpha \quad (8)$$

由于提升矩阵运算是可逆的,对 p 和 u 进行近似操作,所就得到的 DCT 变换也是可逆的。适当地选择 p 和 u 的近似值,DCT 变换只需要移位和整数加法指令,从而实现整型 DCT 变换。图 2 给出了用提升矩阵实现整型 DCT 变换的流程图,表 1 是对应的一系列参数值。需要指出的是,应用这些系数计算整

型 DCT 变换时不需要乘法运算,例如, $11x/16 = x/16 + x/8 + x/2$,其计算可以转化为 2 次加法和 3 次移位运算。

与 binDCT 算法比较,所提出的一维整型 DCT 算法的计算次数算法略有增加,这主要是因为 binDCT 算法提取了某些提升矩阵的因子使得提升矩阵的数量减少,所提取的因子的计算合并至量化部分。这样的算法不适合于应用在所提出的二维整型 DCT 算法中,因为在提出的 2D-DCT 中,1D-DCT 的后续步骤并不是量化,同时,这种乘以任意因子的操作在有限字长运算过程中是不可逆的。

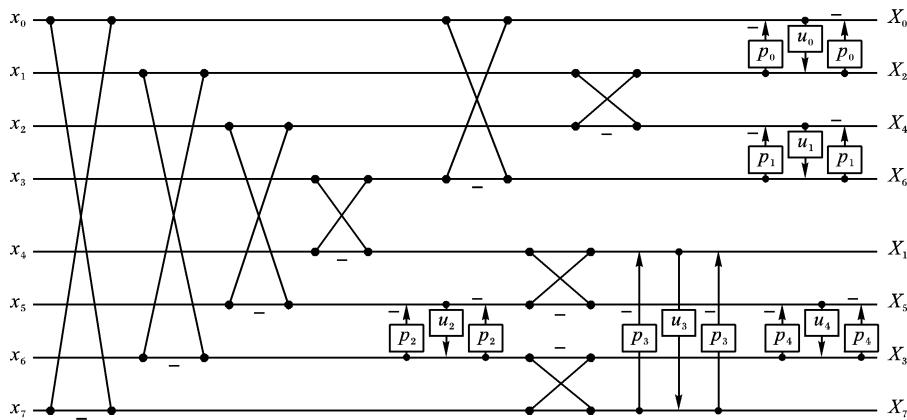


图 3 用提升矩阵实现整型 DCT 变换

4 算法的复杂度分析与比较

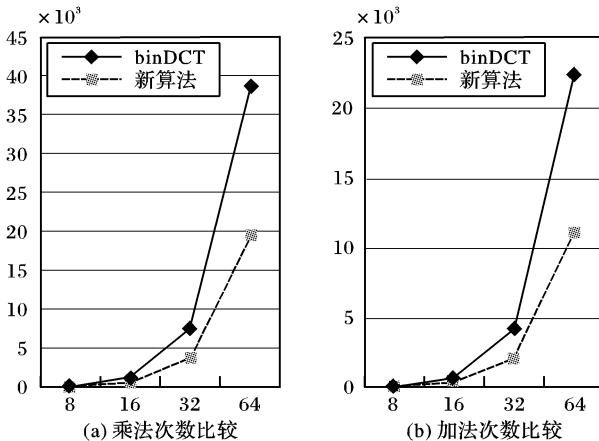


图 4 实验结果比较

首先考虑不使用提升矩阵时算法的计算复杂度,这是评价算法总体性能的指标。步骤 1 在计算 1D-DCT 时,需要的乘法和加法次数分别为 $N \log_2 N - 3N/2 + 4$ 和 $(3N/2)(\log_2 N - 1) + 2$,计算 $N \times N$ 的 2D-DCT 矩阵需要计算 N 个 1D-DCT 变换,因此需要 $N^2 \log_2 N - 3N^2/2 + 4N$ 次乘法和 $(3N^2/2)(\log_2 N - 1) + 2N$ 次加法。步骤 2 需要计算 $N^2 \log_2 N - N/2 + 1$ 次加法,不需要计算乘法。步骤 3 需要计算 $N^2 - 2N + 1$ 次加法,不需要计算乘法。这样,算法总共需要的乘法和加法次数分别为 $N^2 \log_2 N - 3N^2/2 + 4N$ 和 $(5N^2/2) \log_2 N - N^2/2 + 2$ 次。

采用行列法计算 2D-DCT 时,需要计算 1D-DCT 的次数为 $2N$,则 2D-DCT 在不用提升矩阵做近似计算时需要的乘法和加法次数为 $2N^2 \log_2 N - 3N^2 + 8N$ 和 $3N^2 \log_2 N - 3N^2 + 4N$ 。可见,新算法比行列法节省一半的乘法计算量。在 DCT 矩阵尺寸较小时,新算法的优势不太明显;在 DCT 矩阵尺寸较大时,新算法节省的加法计算量呈对数趋势增长,快速计算的特性更

显著,实验结果见图 4。

5 结语

通过多项式变换,二维 DCT 转换成一维 DCT 的计算,接着利用矩阵的因子分解和提升矩阵,实现了二维整型 DCT 的快速计算。与传统的行列法相比,显著地减少了计算量,特别适合于实时应用。新算法完全消除了浮点运算,便于硬件实现。利用提升矩阵实现了信号的精确重构,使新算法特别适合于高清晰度的视频压缩领域以及图片的无损压缩。实验分析表明,新算法与行列法相比,计算量有较大幅度的减少。

参考文献:

- [1] LIANG J, TRAC D. Fast multiplierless approximation of the DCT with the lifting scheme[J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 2001, 49(12): 3032–3044.
- [2] 韦长江, 郝鹏威, 石青云. 基于整型 DCT 变换的图象编码研究[J]. 中国图象图形学报, 2002, 7(3): 287–291.
- [3] CHOKCHAITAM S, IWASHI M, JITAPUNKUL S. A new unified lossless/lossy image compression based on a new integer DCT[J]. IEICE Transactions on Information and Systems, 2005, E88-D(7): 1598–1606.
- [4] ZENG YH, BI GA, LEYMAN AR. New polynomial transform algorithm for multidimensional DCT[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2000, 48(10): 2814–2820.
- [5] DIMITROV V, WAHID K, JULLIEN G. Multiplication-free 8×8 2D DCT architecture using algebraic integer encoding[J]. Electronics Letters, 2004, 40(20): 1310–1311.
- [6] CHOKCHAITAM S, IWASHI M, KAMBAYASHI N. Optimum word length allocation of integer DCT and its error analysis[J]. Signal Processing: Image Communication, 2004, 19(6): 465–478.
- [7] CHANG S-C, YANG J-F, HWANG J-N, et al. A novel rate predictor based on quantized DCT indices and its rate control mechanism[J]. Signal Processing: Image Communication, 2003, 18(6): 427–441.