



文章编号:1001-9081(2018)09-2455-04

DOI:10.11772/j.issn.1001-9081.2018020439

# 正则系统在 Lebesgue- $p$ 范数意义下的快速迭代学习控制

曹伟<sup>1\*</sup>, 李艳东<sup>1</sup>, 王妍玮<sup>2</sup>

(1. 齐齐哈尔大学 计算机与控制工程学院, 黑龙江 齐齐哈尔 161006; 2. 哈尔滨石油学院 机械工程学院, 哈尔滨 150027)

(\*通信作者电子邮箱 yiyuqq168@163.com)

**摘要:**针对一类线性正则系统,传统迭代学习控制算法收敛速度较慢的问题,设计了一种快速迭代学习控制算法。该算法在传统 P型迭代学习控制算法基础上,增加了由相邻两次迭代时跟踪误差构成的上一次差分信号和当前差分信号,并在 Lebesgue- $p$  范数度量意义下,利用卷积推广的 Young 不等式严格证明了,当迭代次数趋于无穷大时,系统的跟踪误差收敛于零,并给出了算法的收敛条件。该算法与传统 P型迭代学习控制算法相比,不仅提高了收敛速度,而且还避免了采用  $\lambda$  范数度量跟踪误差的缺陷,最后通过仿真结果进一步验证了所提算法的有效性。

**关键词:** 正则系统; 迭代学习控制; Lebesgue- $p$  范数; Young 不等式; 跟踪误差

中图分类号: TP273 文献标志码:A

## Fast iterative learning control for regular system in sense of Lebesgue- $p$ norm

CAO Wei<sup>1\*</sup>, LI Yandong<sup>1</sup>, WANG Yanwei<sup>2</sup>

(1. College of Computer and Control Engineering, Qiqihar University, Qiqihar Heilongjiang 161006, China;

2. School of Mechanical Engineering, Harbin Institute of Petroleum, Harbin Heilongjiang 150027, China)

**Abstract:** Focused on the problem that the convergence speed of traditional iterative learning control algorithm used in linear regular systems is slow, a kind of fast iterative learning control algorithm was designed for a class of linear regular systems. Compared with the traditional P-type iterative learning control algorithm, the algorithm increases tracking error at neighboring two iterations generated from last difference signal and present difference signal. And the convergence of the algorithm was proven by using Yong inequality of convolutional inference in the sense of Lebesgue- $p$  norm. The results show the tracking error of the system will converge to zero with infinite iterations. The convergence condition is also given. Compared with P-type iterative learning control, the proposed algorithm can fasten the convergence and avoid the shortcomings of using  $\lambda$  norm to measure the tracking error. Simulation further testifies the validity and effectiveness.

**Key words:** regular system; iterative learning control; Lebesgue- $p$  norm; Young inequality; tracking error

## 0 引言

迭代学习控制算法与神经网络和自适应控制等其他学习类算法不同,迭代学习控制是针对在有限时间区间上具有重复运行特性的被控系统,利用系统存储的跟踪误差对控制输入进行逐次修正,从而实现完全跟踪期望轨迹的目的。由于不需要精确模型信息便可以设计迭代学习控制器,且结构简单等优点,因此迭代学习控制<sup>[1]</sup>自提出以来,无论是在理论研究方面还是在实际应用中都取得了大量研究成果<sup>[2-3]</sup>。

到目前为止,关于迭代学习控制大多数相关文献都是在  $\lambda$  范数度量意义下研究算法的收敛性,并指出在  $\lambda$  足够大时算法的收敛性才能够得到保证<sup>[4-5]</sup>。由于  $\lambda$  范数是有上确界的负指数函数型范数,因此不能客观量化误差的本质特征。文献[6]研究发现,当  $\lambda$  参数值取得较大时,虽然学习算法在理论上是收敛的,但在系统运行初始阶段误差的上确界值往往会超出实际工程允许的误差范围。为避免  $\lambda$  范数上述缺陷,文献[7]在上确界范数度量意义下对比例微分(Proportional-Derivative, PD)型迭代学习控制算法的收敛性

进行了研究,发现学习算法只能在系统运行时间区间的某个子区间内是收敛的。文献[8]为使迭代学习控制算法在上确界范数度量意义下是收敛的,研究了运行时间区间可调整和学习律可子区间化进行修正的算法,但算法结构相当复杂,在实际工程系统中很难得到应用。进一步,由于 Lebesgue- $p$  范数同时考虑了函数  $f$  在整个时间区间上的上确界值和各个运行时刻函数值的  $p$  次方积分,因此 Lebesgue- $p$  范数在量化和反应函数  $f$  的性态方面显得更为合理。基于此文献[9]利用 Lebesgue- $p$  范数讨论了迭代学习控制的跟踪性能,但没有涉及算法的收敛性。文献[10]研究了多状态时滞线性系统迭代学习控制的稳定性,并利用 Lebesgue-2 范数来评估学习算法的跟踪性能。文献[11]针对线性时不变系统,在 Lebesgue- $p$  范数度量意义下对具有反馈信息的 PD 型迭代学习控制进行了收敛性分析。文献[12-13]在 Lebesgue- $p$  范数意义下分析了分数阶迭代学习控制律的收敛性。文献[14]针对一类线性系统在 Lebesgue- $p$  范数意义下,分析了加速修正初态误差的迭代学习控制算法的收敛性。进一步,文献[15]在 Lebesgue- $p$  范数意义下,讨论了变增益迭代学习控制算法的收敛性。分析

收稿日期:2018-03-09;修回日期:2018-04-01;录用日期:2018-04-20。 基金项目:国家自然科学基金面上项目(61672304);黑龙江省自然科学基金面上项目(F2015025);齐齐哈尔市科学技术工业攻关项目(GYGG-201620)。

**作者简介:**曹伟(1977—),男,吉林白城人,副教授,博士,主要研究方向:迭代学习控制、滑模控制; 李艳东(1978—),男,黑龙江呼兰人,副教授,博士,主要研究方向:移动机器人控制、智能控制; 王妍玮(1982—),女,黑龙江哈尔滨人,教授,博士,主要研究方向:模式识别、图像处理。



文献[10~15]可以发现,虽然这些研究成果避免了采用 $\lambda$ 范数度量跟踪误差的缺陷,但这些研究成果都是针对 $D=0$ 的完全非正则系统进行收敛性分析的,其结论不适用于 $D\neq 0$ 的正则系统。原因就在于,对于完全非正则系统,迭代学习控制律中必须有跟踪误差的导数,即微分(Derivative, D)型或比例积分微分(Proportional-Integration-Derivative, PID)型迭代学习律,而对于正则系统则只能使用跟踪误差来修正控制律,即比例(Proportional, P)型迭代学习律。由于传统P型迭代学习算法只利用以往跟踪误差来修正控制律,因此跟踪速度较低。为提高传统P型迭代学习算法的收敛速度,文献[16]提出了一种迭代学习控制算法,但对其收敛性分析仍然采用了 $\lambda$ 范数。

鉴于以上分析,本文针对一类正则系统,为提高传统P型迭代学习算法的收敛速度,同时克服采用 $\lambda$ 范数度量跟踪误差的缺陷,提出了一种充分利用系统以往存储的跟踪误差和当前跟踪误差信息以及迭代轴上相邻两次误差的差分信号,对控制输入进行逐次修正的快速迭代学习控制算法,给出了Lebesgue- $p$ 范数意义下的收敛条件。

## 1 问题描述

考虑如下一类具有重复运行特性的正则系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_k(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_k(t) \\ \mathbf{y}_k(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}_k(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}_k(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中: $k$ 为迭代次数, $t\in[0,T]$ 为系统运行的有限时间, $\mathbf{x}_k(t)\in\mathbb{R}^n$ 为系统第 $k$ 次运行时的状态向量, $\mathbf{u}_k(t)\in\mathbb{R}^r$ 和 $\mathbf{y}_k(t)\in\mathbb{R}^m$ 分别为系统第 $k$ 次运行时的控制输入向量和输出向量, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 为适当维数的矩阵。

假设1 每次迭代时系统初始状态与期望初始状态保持一致,即 $\mathbf{x}_k(0)=\mathbf{x}_d(0), k=0,1,2,\dots$

假设2 存在唯一的理想输入 $\mathbf{u}_d(t)$ 使式(2)成立:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_d(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_d(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_d(t) \\ \mathbf{y}_d(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}_d(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}_d(t) \end{cases} \quad (2)$$

其中: $\mathbf{y}_d(t)$ 为期望轨迹, $\mathbf{x}_d(t)$ 为期望状态。

### 1.1 控制目标

本文的控制目标:针对正则系统(1),为克服传统P型迭代学习控制算法收敛速度较低的不足,设计出一种快速迭代迭代学习控制算法,同时利用Lebesgue- $p$ 范数对其进行收敛性分析,克服采用 $\lambda$ 范数度量跟踪误差的缺陷。

针对这一控制目标,快速迭代学习控制算法设计如下:

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \mathbf{L}_{p1}\mathbf{e}_k(t) + \mathbf{L}_{d1}\Delta\mathbf{e}_k(t) + \mathbf{L}_{p2}\mathbf{e}_{k+1}(t) + \mathbf{L}_{d2}\Delta\mathbf{e}_{k+1}(t) \quad (3)$$

其中: $\mathbf{e}_k(t)=\mathbf{y}_d(t)-\mathbf{y}_k(t)$ 为第 $k$ 次运行的跟踪误差, $\mathbf{e}_{k+1}(t)=\mathbf{y}_d(t)-\mathbf{y}_{k+1}(t)$ 为第 $k+1$ 次运行的跟踪误差。 $\Delta\mathbf{e}_k(t)=\mathbf{e}_{k-1}(t)-\mathbf{e}_k(t)$ 和 $\Delta\mathbf{e}_{k+1}(t)=\mathbf{e}_k(t)-\mathbf{e}_{k+1}(t)$ 为迭代轴上相邻两次误差的差分信号,其中 $\Delta\mathbf{e}_k(t)$ 称为上一次的差分信号, $\Delta\mathbf{e}_{k+1}(t)$ 称为当前次的差分信号。 $\mathbf{L}_{p1}$ 为第 $k$ 次跟踪误差的学习增益, $\mathbf{L}_{p2}$ 为第 $k+1$ 次跟踪误差的反馈增益, $\mathbf{L}_{d1}$ 和 $\mathbf{L}_{d2}$ 分别为差分信号的学习增益和反馈增益。

由算法(3)可知,当 $\mathbf{L}_{p2}$ 和 $\mathbf{L}_{d2}$ 取零时,算法(3)即为开环迭代学习控制算法:

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \mathbf{L}_{p1}\mathbf{e}_k(t) + \mathbf{L}_{d1}\Delta\mathbf{e}_k(t) \quad (4)$$

当 $\mathbf{L}_{d1}, \mathbf{L}_{p2}$ 和 $\mathbf{L}_{d2}$ 都取零时,算法(3)则变为传统P型迭代学习控制算法:

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \mathbf{L}_{p1}\mathbf{e}_k(t) \quad (5)$$

现在的问题是针对正则系统(1),采用算法(3)控制,当 $\mathbf{L}_{d1}, \mathbf{L}_{p2}$ 和 $\mathbf{L}_{d2}$ 满足什么条件时,系统是收敛的。

### 1.2 数学基础

为便于分析控制算法的收敛性,给出如下定义和引理:

**定义1** 向量值函数 $f:[0,T]\rightarrow\mathbb{R}^n$ 的 $\lambda$ 范数定义<sup>[1]</sup>为:

$$\|f(\cdot)\|_\lambda = \sup_{t\in[0,T]} e^{-\lambda t} (\max_{1\leq i\leq n} |f^i(t)|); \quad \lambda > 0$$

向量值函数 $f$ 的上确界范数<sup>[10]</sup>和Lebesgue- $p$ 范数<sup>[21]</sup>定义为:

$$\|f(\cdot)\|_{\sup} = \sup_{t\in[0,T]} (\max_{1\leq i\leq n} |f^i(t)|)$$

$$\|f(\cdot)\|_p = \left[ \int_0^T (\max_{1\leq i\leq n} |f^i(t)|)^p dt \right]^{\frac{1}{p}}; \quad 1 \leq p \leq \infty$$

文献[17]中给出了一个重要结论就是:上确界范数是Lebesgue- $p$ 范数的特例,即:

$$\lim_{p\rightarrow\infty} \|f(\cdot)\|_p = \|f(\cdot)\|_\infty = \|f(\cdot)\|_{\sup}$$

**引理1**<sup>[17]</sup> 如果向量值函数 $g, h: [0,T]\rightarrow\mathbb{R}$ 是Lebesgue可积的,那么推广的卷积Young不等式为:

$$\|(g*h)(\cdot)\|_r \leq \|g(\cdot)\|_q \|h(\cdot)\|_p$$

其中: $(g*h)(t) = \int_0^t g(t-\tau) h(\tau) d\tau$ 为函数 $g$ 和 $h$ 的卷积,参数 $p, q, r$ 满足 $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ 并且 $1/r = 1/p + 1/q - 1$ 。

特别地,当 $r=p, q=1$ 时,Young不等式变为 $\|(g*h)(\cdot)\|_p \leq \|g(\cdot)\|_1 \|h(\cdot)\|_p$ 。

## 2 收敛性分析

**定理1** 利用设计的算法(3)控制满足假设条件1~2的系统(1),如果下列条件满足:

$$1) \rho^{-1} > 0;$$

$$2) \bar{\rho} = \rho^{-1}(\rho_1 + \rho_2) < 1$$

其中: $\rho = \|\mathbf{I} + \mathbf{DK}_2\| - \|\mathbf{C} \exp(\mathbf{A} \cdot (\cdot)) \mathbf{BK}_2\|_1, \rho_1 = \|\mathbf{DL}_{d1}\| + \|\mathbf{C} \exp(\mathbf{A} \cdot (\cdot)) \mathbf{BL}_{d1}\|_1, \rho_2 = \|\mathbf{I} - \mathbf{DK}_1\| + \|\mathbf{C} \exp(\mathbf{A} \cdot (\cdot)) \mathbf{BK}_1\|_1, \mathbf{K}_1 = \mathbf{L}_{p1} + \mathbf{L}_{d1} + \mathbf{L}_{d2}, \mathbf{K}_2 = \mathbf{L}_{p2} - \mathbf{L}_{d2}$ ,则当迭代次数 $k\rightarrow\infty$ 时,系统在Lebesgue- $p$ 范数意义下的跟踪误差趋于零,即 $\lim_{k\rightarrow\infty} \|\mathbf{e}_{k+1}(\cdot)\|_p = 0$ 。

**证明** 由系统(1)可知:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k+1}(t) &= \mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}_{k+1}(t) = \mathbf{e}_k(t) - [\mathbf{C} \exp(\mathbf{At}) \mathbf{x}_{k+1}(0) - \\ &\quad \mathbf{C} \exp(\mathbf{At}) \mathbf{x}_k(0) + \mathbf{C} \int_0^t \exp(\mathbf{A}(t-\tau)) \mathbf{Bu}_{k+1}(\tau) d\tau + \\ &\quad \mathbf{Du}_{k+1}(t) - \mathbf{C} \int_0^t \exp(\mathbf{A}(t-\tau)) \mathbf{Bu}_k(\tau) d\tau - \mathbf{Du}_k(t)] = \\ &= \mathbf{e}_k(t) - [\mathbf{C} \exp(\mathbf{At})(\mathbf{x}_{k+1}(0) - \mathbf{x}_k(0)) + \mathbf{C} \int_0^t \exp(\mathbf{A}(t-\tau)) \mathbf{B}(\mathbf{u}_{k+1}(\tau) - \mathbf{u}_k(\tau)) d\tau + \mathbf{D}(\mathbf{u}_{k+1}(t) - \mathbf{u}_k(t))] \end{aligned} \quad (6)$$

根据假设1,并把式(3)代入式(6)可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k+1}(t) &= \mathbf{e}_k(t) - \mathbf{C} \int_0^t [\exp(\mathbf{A}(t-\tau)) \mathbf{B}(\mathbf{L}_{p1}\mathbf{e}_k(\tau) + \\ &\quad \mathbf{L}_{d1}\Delta\mathbf{e}_k(\tau) + \mathbf{L}_{p2}\mathbf{e}_{k+1}(\tau) + \mathbf{L}_{d2}\Delta\mathbf{e}_{k+1}(\tau))] d\tau - \\ &\quad \mathbf{D}(\mathbf{L}_{d1}\Delta\mathbf{e}_k(t) + \mathbf{L}_{p2}\mathbf{e}_{k+1}(t) + \mathbf{L}_{d2}\Delta\mathbf{e}_{k+1}(t)) = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \mathbf{e}_k(t) &= \mathbf{C} \int_0^t \{\exp(\mathbf{A}(t-\tau)) \mathbf{B}[\mathbf{L}_{d1} \mathbf{e}_{k-1}(\tau) + (\mathbf{L}_{p1} + \\ &\quad \mathbf{L}_{d2} + \mathbf{L}_{d1}) \mathbf{e}_k(\tau) + (\mathbf{L}_{p2} - \mathbf{L}_{d2}) \mathbf{e}_{k+1}(\tau)]\} d\tau - \mathbf{D}[\mathbf{L}_{d1} \\ &\quad \mathbf{e}_{k-1}(t) + (\mathbf{L}_{p2} + \mathbf{L}_{d2} + \mathbf{L}_{d1}) \mathbf{e}_k(t) + (\mathbf{L}_{p2} - \mathbf{L}_{d2}) \\ &\quad \mathbf{e}_{k+1}(t)] = \mathbf{e}_k(t) - \mathbf{C} \int_0^t \exp(\mathbf{A}(t-\tau)) \mathbf{BL}_{d1} \\ &\quad \mathbf{e}_{k-1}(\tau) d\tau - \mathbf{C} \int_0^t \exp(\mathbf{A}(t-\tau)) \mathbf{BK}_1 \mathbf{e}_k(\tau) d\tau - \\ &\quad \mathbf{C} \int_0^t \exp(\mathbf{A}(t-\tau)) \mathbf{BK}_2 \mathbf{e}_{k+1}(\tau) d\tau - \mathbf{DL}_{d1} \mathbf{e}_{k-1}(t) - \\ &\quad \mathbf{DK}_1 \mathbf{e}_k(t) - \mathbf{DK}_2 \mathbf{e}_{k+1}(t) \end{aligned} \quad (7)$$

整理式(7)可得:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} + \mathbf{DK}_2) \mathbf{e}_{k+1}(t) &= (\mathbf{I} - \mathbf{DK}_1) \mathbf{e}_k(t) - \mathbf{C} \int_0^t \exp(\mathbf{A}(t-\tau)) \mathbf{BL}_{d1} \mathbf{e}_{k-1}(\tau) d\tau - \mathbf{C} \int_0^t \exp(\mathbf{A}(t-\tau)) \mathbf{BK}_1 \\ &\quad \mathbf{e}_k(\tau) d\tau - \mathbf{C} \int_0^t \exp(\mathbf{A}(t-\tau)) \mathbf{BK}_2 \mathbf{e}_{k+1}(\tau) d\tau - \mathbf{DL}_{d1} \\ &\quad \mathbf{e}_{k-1}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)两边取 Lebesgue- $p$  范数,并应用 Young 不等式,则得:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{I} + \mathbf{DK}_2\| \|\mathbf{e}_{k+1}(\cdot)\|_p &\leq \|\mathbf{I} - \mathbf{DK}_1\| \|\mathbf{e}_k(\cdot)\|_p + \\ &\quad \|\mathbf{C} \exp(\mathbf{A} \cdot (\cdot)) \mathbf{BL}_{d1}\|_1 \|\mathbf{e}_{k-1}(\cdot)\|_p + \\ &\quad \|\mathbf{C} \exp(\mathbf{A} \cdot (\cdot)) \mathbf{BK}_1\|_1 \|\mathbf{e}_k(\cdot)\|_p + \\ &\quad \|\mathbf{C} \exp(\mathbf{A} \cdot (\cdot)) \mathbf{BK}_2\|_1 \|\mathbf{e}_{k+1}(\cdot)\|_p + \\ &\quad \|\mathbf{DL}_{d1}\| \|\mathbf{e}_{k-1}(\cdot)\|_p \end{aligned} \quad (9)$$

整理式(9)得:

$$\begin{aligned} (\|\mathbf{I} + \mathbf{DK}_2\| - \|\mathbf{C} \exp(\mathbf{A} \cdot (\cdot)) \mathbf{BK}_2\|_1) \\ \|\mathbf{e}_{k+1}(\cdot)\|_p &\leq (\|\mathbf{DL}_{d1}\| + \|\mathbf{C} \exp(\mathbf{A} \cdot (\cdot)) \mathbf{BL}_{d1}\|_1) \|\mathbf{e}_{k-1}(\cdot)\|_p + (\|\mathbf{I} - \mathbf{DK}_1\| + \|\mathbf{C} \exp(\mathbf{A} \cdot (\cdot)) \mathbf{BK}_1\|_1) \\ &\quad \|\mathbf{e}_k(\cdot)\|_p \end{aligned} \quad (10)$$

即:

$$\rho \|\mathbf{e}_{k+1}(\cdot)\|_p \leq \rho_1 \|\mathbf{e}_{k-1}(\cdot)\|_p + \rho_2 \|\mathbf{e}_k(\cdot)\|_p \leq (\rho_1 + \rho_2) \max\{\|\mathbf{e}_{k-1}(\cdot)\|_p, \|\mathbf{e}_k(\cdot)\|_p\} \quad (11)$$

整理式(11)可得:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_{k+1}(\cdot)\|_p &\leq \bar{\rho}^{-1} (\rho_1 + \rho_2) \max\{\|\mathbf{e}_{k-1}(\cdot)\|_p, \\ &\quad \|\mathbf{e}_k(\cdot)\|_p\} = \bar{\rho} \max\{\|\mathbf{e}_{k-1}(\cdot)\|_p, \\ &\quad \|\mathbf{e}_k(\cdot)\|_p\} \end{aligned} \quad (12)$$

因为由定理 1 中的条件 2) 可知,满足  $\bar{\rho} < 1$ ,因此则有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_{k+1}(\cdot)\|_p = 0$  成立,即当迭代次数趋于无穷大时,系统的跟踪误差趋于零。

注 1 相对于  $\lambda$  范数意义下的收敛条件来说,本文给出的收敛条件虽然较保守,但其收敛性不再依赖于  $\lambda$  值的选取。同时本文得到的收敛条件是  $\bar{\rho} = \rho^{-1}(\rho_1 + \rho_2) < 1$ ,而不再必须是  $\rho^{-1} < 1$  或  $(\rho_1 + \rho_2) < 1$ ,因此使得在选取反馈增益和学习增益时自由度更大。

### 3 仿真实验

为验证本文算法的有效性,考虑如下一类线性正则系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [2 \ 0] x(t) + u(t) \end{cases} \quad (13)$$

其中,  $t \in [0, 2]$ 。利用算法(3)控制系统(13),设期望轨迹

$y_d(t) = \sin(5t)$ , 系统初始状态为  $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0$ , 初始控制取  $u(t) = 0$ , 在满足收敛条件下分别取  $L_{p1} = 0.3, L_{d1} = 0.1, L_{p2} = 0.2, L_{d2} = 0.1$ 。为验证本文提出算法(3)的有效性,分别与开环算法(4)和传统 P 型算法(5)进行仿真比较,仿真结果如图 1~3 所示。其中:图 1 为算法(3)控制时不同迭代次数的输出跟踪曲线;图 2 为在上确界范数和 Lebesgue-2 范数意义下跟踪误差曲线;图 3 为在 Lebesgue-2 范数意义下算法(3)和算法(4)及算法(5)的跟踪误差曲线。

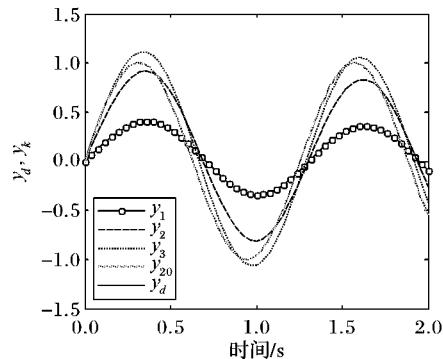


图 1 期望轨迹为正弦时算法(3)的跟踪效果

Fig. 1 Tracking effect of algorithm (3) at sine desired trajectory

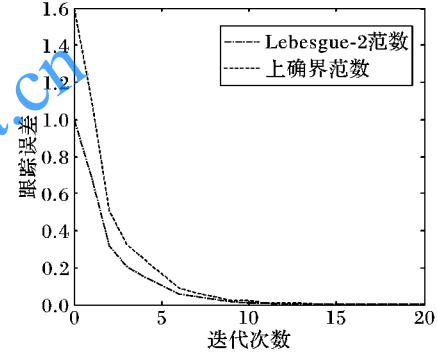


图 2 控制算法(3)的跟踪误差曲线

Fig. 2 Tracking error of algorithm (3)

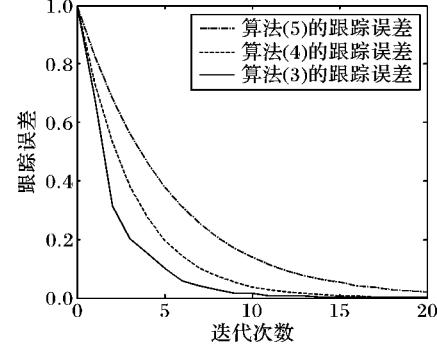


图 3 控制算法(3)、(4)和(5)的跟踪误差曲线

Fig. 3 Tracking error of algorithms (3), (4) and (5)

从图 1 可以看出,在第 20 次迭代后,系统输出在有限时间内已经完全跟踪上了期望轨迹。由图 2 可看出算法(3)的 Lebesgue-2 范数和上确界范数都收敛于 0。而从图 3 可看出,算法(3)的收敛速度最高,算法(4)次之,算法(5)的收敛速度最低。其原因就在于,算法(4)是在算法(5)的基础上增加了相邻两次迭代时误差的差分信号;算法(3)则是当前误差和以前误差构成差分信号,而算法(4)只是利用以前误差构成差分信号,算法(3)相比算法(4)充分利用了当前误差信息。为更好说明本文设计的算法(3)的有效性,下面给出算法



(3)、算法(4)和算法(5)在不同迭代次数下跟踪误差的数值,如表1所示。

由表1可以看出,算法(3)、算法(4)和算法(5)在第1次迭代时跟踪误差都是0.9996,经过20次迭代后,算法(5)的误差为0.0299,算法(4)的误差为0.0020,算法(3)的误差为0.0018。从表1的列向数据来看,随迭代次数增加这3种算法的跟踪误差也都能逐次减小,但从表1的横向数据来看,在相同迭代次数下,算法(3)的跟踪误差最小,其次是算法(4),算法(5)的跟踪误差最大。因此,由表1可看出本文设计的快速迭代学习控制算法(3)的收敛速度明显高于算法(4)和算法(5)的收敛速度。

表1 算法(3)、(4)和(5)在不同迭代次数下的跟踪误差  
Tab. 1 Tracking errors of algorithms (3), (4) and (5)

迭代次数 $k$	算法(5)误差	算法(4)误差	算法(3)误差
1	0.9996	0.9996	0.9996
5	0.4872	0.2755	0.1532
10	0.1904	0.0533	0.0162
15	0.0758	0.0103	0.0023
20	0.0299	0.0020	0.0018

为了说明本文算法(3)对于不同期望信号的跟踪能力,

在此再假设期望轨迹  $y_d(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 0.4 \\ 1, & 0.4 \leq t < 0.8 \\ 0, & 0.8 \leq t < 1.2, \text{ 其他参数} \\ 1, & 1.2 \leq t < 1.6 \\ 0, & 1.6 \leq t \leq 2 \end{cases}$

数的取值与上面正弦期望轨迹的情况相同,输出曲线在不同迭代次数下对期望轨迹的跟踪效果如图4所示,图4给出了迭代1次、迭代2次、迭代5次和迭代20次时的跟踪效果。

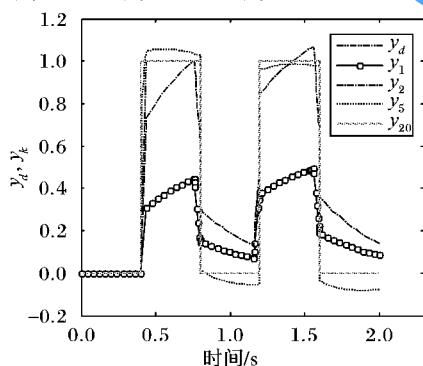


图4 期望轨迹为方波时算法(3)的跟踪效果

Fig. 4 Tracking effect of algorithm (3) at square wave desired trajectory

由图1和图4可以看出对于缓变和突变的期望轨迹,本文设计的控制算法(3),随迭代次数的增加都能在有限时间区间内实现对不同期望轨迹的完全跟踪。

#### 4 结语

本文针对一类具有输入输出直接传输项的线性正则系统,提出了一种快速迭代学习控制算法,并在Lebesgue- $p$ 范数意义下证明了算法的收敛性,给出了使算法收敛的范数形式的充分条件。该算法不仅取得了比传统P型算法较高的收敛速度,而且还避免了采用 $\lambda$ 范数度量跟踪误差的缺陷,增大了学习增益选取的自由度。本文也存在一定的不足之处,由

于受引理1的卷积限制,本文算法只适用于线性正则系统。因此,在以后研究工作中,可进一步分析非线性正则系统在Lebesgue- $p$ 范数意义下的收敛性。

#### 参考文献 (References)

- [1] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robots by learning [J]. Journal of Field Robotics, 1984, 1(2): 123–140.
- [2] SON T D, PIPELEERS G, SWEVERS J. Robust monotonic convergent iterative learning control [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(4): 1063–1068.
- [3] XIONG W, YU X, PATEL R, et al. Iterative learning control for discrete-time systems with event-triggered transmission strategy and quantization [J]. Automatica, 2016, 72(C): 84–91.
- [4] BU X, HOU Z, YU F, et al. Brief paper: iterative learning control for a class of non-linear switched systems [J]. IET Control Theory and Applications, 2013, 7(3): 470–481.
- [5] LI X, XU J, HUANG D. Iterative learning control for nonlinear dynamic systems with randomly varying trial lengths [J]. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 2015, 29(11): 1341–1353.
- [6] LEE H S, BIEN Z. A note on convergence property of iterative learning controller with respect to sup norm [J]. Automatica, 1977, 13(8): 1591–1593.
- [7] PARK K H, BIEN Z. A study on iterative learning control with adjustment of learning interval for monotone convergence in the sense of sup-norm [J]. Asian Journal of Control, 2002, 4(1): 111–118.
- [8] PARK K H, BIEN Z. Intervalized iterative learning control for monotone convergence in the sense of sup-norm [J]. International Journal of Control, 2005, 78(15): 1218–1227.
- [9] RUAN X, BIEN Z Z, PARK K H. Decentralized iterative learning control to large-scale industrial processes for nonrepetitive trajectory tracking [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans, 2008, 38(1): 238–252.
- [10] MENG D Y, JIA Y M, DU J P, et al. Stability analysis of continuous-time iterative learning control systems with multiple state delays [J]. Acta Automatica Sinica, 2010, 36(5): 696–703.
- [11] 阮小娥, 连建帮, 吴慧卓. 具有反馈信息的迭代学习控制律在Lebesgue- $p$ 范数意义下的收敛性 [J]. 自动化学报, 2011, 37(4): 513–516. (RUAN X E, LIAN J B, WU H Z. Convergence of iterative learning control with feedback information in the sense of Lebesgue- $p$  norm [J]. Acta Automatica Sinica, 2011, 37(4): 513–516.)
- [12] 张克军, 彭国华. 具有反馈信息的PD $^\alpha$ -型迭代学习控制律在Lebesgue- $p$ 范数意义下的收敛性分析 [J]. 西北工业大学学报, 2017, 35(2): 310–315. (ZHANG K J, PENG G H. Convergence analysis of PD $^\alpha$ -type iterative learning control with feedback information in the sense of Lebesgue- $p$  norm [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2017, 35(2): 310–315.)
- [13] 张克军, 彭国华. PD $^\alpha$ -型分数阶迭代学习控制在L $p$ 范数意义下的收敛性分析 [J]. 系统工程与电子技术, 2017, 39(10): 2285–2290. (ZHANG K J, PENG G H. Convergence analysis of PD $^\alpha$ -type fractional-order iterative learning control in the sense of L $p$  norm [J]. Systems Engineering and Electronics, 2017, 39(10): 2285–2290.)

(下转第2463页)



整地面仿真环境,仿真结果显示机器人在遇到非平整地面后,经过算法调整后姿态角度波动范围大部分在 $2^{\circ}$ 以内,极个别位置有 $3^{\circ}$ 左右的波动,表明机器人学会了步态自主调整,能够保持行走稳定性,由此证明了算法的有效性,与传统控制方法相比,无需进行复杂的动力学建模过程,为解决双足机器人在非平整地面行走的稳定性问题提供了新的思路。

#### 参考文献 (References)

- [1] 田彦涛,孙中波,李宏扬,等.动态双足机器人的控制与优化研究进展[J].自动化学报,2016,42(8):1142–1157.(TIAN Y T, SUN Z B, LI H Y, et al. A review of optimal and control strategies for dynamic walking bipedal robots [J]. Acta Automatica Sinica, 2016, 42(8): 1142 – 1157.)
- [2] DANG V C, SUNG K J, KIM J W. Sensory reflex control of a humanoid robot using FSR sensor [C]// Proceedings of the 2015 IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. Piscataway, NJ: IEEE, 2015: 1406 – 1409.
- [3] KIM J W, TRAN T T, van DANG C, et al. Motion and walking stabilization of humanoids using sensory reflex control [EB/OL]. [2017-12-07]. <http://journals.sagepub.com/doi/pdf/10.5772/63116>.
- [4] CHEN G R, WANG J Z, WANG L P. Gait planning and compliance control of a biped robot on stairs with desired ZMP [J]. IFAC Proceedings Volumes, 2014, 47(3): 2165 – 2170.
- [5] 李建,陈卫东,王丽军,等.未知不平整地面上的双足步行稳定控制[J].电子学报,2010,38(11):2669–2674.(LI J, CHEN W D, WANG L J, et al. Stability control for biped walking on unknown rough surface [J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(11): 2669 – 2674.)
- [6] SASAKI H, HORIUCHI T, KATO S. A study on behavior acquisition of mobile robot by deep Q-network [J]. ICIC Express Letters, 2017, 8(4): 727 – 733.
- [7] TAI L, LI S, LIU M. A deep-network solution towards model-less obstacle avoidance [C]// Proceedings of the 2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Piscataway, NJ: IEEE, 2016: 2759 – 2764.
- [8] GU S, HOLLY E, LILLICRAP T, et al. Deep reinforcement learning for robotic manipulation with asynchronous off-policy updates [C]// Proceedings of the 2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Piscataway, NJ: IEEE, 2017: 3389 – 3396.
- [9] MNII V, KAVUKCUOGLU K, SILVER D, et al. Playing Atari with deep reinforcement learning [EB/OL]. [2017-12-09]. <http://www.valleytalk.org/wp-content/uploads/2014/05/deep-mind% E7%A0% 94% E7%A9% B6.pdf>.
- [10] RAIBERT M H. Hopping in legged systems — modeling and simulation for the two-dimensional one-legged case [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1984, SMC-14(3): 451 – 463.
- [11] 韩军,郝立.机器人关节空间的轨迹规划及仿真[J].南京理工大学学报(自然科学版),2000,24(6):540 – 543.(HAN J, HAO L. Trajectory planning and simulation of robot in joint coordinate system [J]. Journal of Nanjing University of Science and Technology, 2000, 24(6): 540 – 543.)
- [12] YANG J, HUANG Q, LI J, et al. Walking pattern generation for humanoid robot considering upper body motion [C]// Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Piscataway, NJ: IEEE, 2006: 4441 – 4446.
- [13] WATKINS C J C H, DAYAN P. Q-learning [J]. Machine Learning, 1992, 8(3/4): 279 – 292.
- [14] MNII V, KAVUKCUOGLU K, SILVER D, et al. Human-level control through deep reinforcement learning [J]. Nature, 2015, 518(7540): 529 – 533.

This work is partially supported by the National Ministerial Level Advanced Research Foundation (3020020221111).

**ZHAO Yuting**, born in 1993, M. S. candidate. Her research interests include robot intelligent control strategy, bionic robot.

**HAN Baoling**, born in 1957, Ph. D., professor. Her research interests include biomimetic robot, optical mechatronics design, mechanical CAD.

**LUO Qingsheng**, born in 1956, Ph. D., professor. His research interests include special robot, mechatronics.

#### (上接第 2458 页)

- [14] 兰天一,林辉. Lebesgue- $p$ 范数意义下对初态误差进行加速修正的迭代学习控制[J]. 控制与决策, 2016, 31(3): 429 – 434. (LAN T Y, LIN H. Accelerated modify approach for initial state error iterative learning control in sense of Lebesgue- $p$  norm [J]. Control and Decision, 2016, 31(3): 429 – 434.)
- [15] 兰天一,林辉. Lebesgue- $p$ 范数意义下区间可调节的变增益加速迭代学习控制[J]. 控制与决策, 2017, 32(11): 2071 – 2075. (LAN T Y, LIN H. Accelerated iterative learning control algorithm with variable gain and adjustment of interval in sense of Lebesgue- $p$  norm [J]. Control and Decision, 2017, 32(11): 2071 – 2075.)
- [16] 王洪斌,王艳.机械臂带角度修正的开闭环迭代学习轨迹跟踪控制[J].自动化学报,2010,36(12):1758 – 1765.(WANG H B, WANG Y. Open-closed loop ILC corrected with angle relationship of output vectors for tracking control of manipulator [J]. Acta Au-

- tomatica Sinica, 2010, 36(12): 1758 – 1765.)
- [17] PINSKY M A. Introduction to Fourier Analysis and Wavelets [M]. Pacific Grove: Brooks/Cole, 2002: 169 – 175.

This work is partially supported by the National Natural Science Foundation of China (61672304), the Natural Science Foundation of Heilongjiang Province (F2015025), the Qiqihar Science and Technology Industrial Project (GYCG-201620).

**CAO Wei**, born in 1977, Ph. D., associate professor. His research interests include iterative learning control, sliding mode control.

**LI Yandong**, born in 1978, Ph. D., associate professor. His research interests include mobile robot control, intelligent control.

**WANG Yanwei**, born in 1982, Ph. D., professor. Her research interests include pattern recognition, image processing.